Capítulo II
ASPECTOS GENERALES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

2.1 ECUACIÓN DIFERENCIAL:

Es una ecuación que contiene derivadas o diferenciales.

Ejemplo 1:

Las siguientes expresiones constituyen ecuaciones diferenciales:

a. $\frac{dy}{dx} = 5x + 1$ (tiene derivadas)

b. $y' = 3(y'')^2 + 5y - 3x + 2$ (tiene derivadas)

c. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x.\partial y} = 0$ (tiene derivadas parciales)

d. $y'' + q.y = 0$ (tiene derivadas)

e. $(x + y).dx = (y - x).dy$ (tiene diferenciales)

f. $y''' + y'' + y' + y = \text{Sen}(3x)$ (tiene derivadas)

g. $\text{Sen}(x + y).dx + \text{Cos}(x - y).dy = 0$ (tiene diferenciales)

h. $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} - 3y = 2t^3 - t^2 + 3t - 5$ (tiene derivadas)

i. $\frac{d^4y}{dx^4} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + y = e^{3x}$ (tiene derivadas)

2.2 FUNCIÓN PRIMITIVA DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL:

Es una expresión equivalente a la ecuación diferencial que carece de derivadas y diferenciales. A pesar de utilizarse el término "**función**", la expresión obtenida puede ser también una "**relación**" matemática.

Debido a manejos algébricos, la "**Función Primitiva**" puede representarse de distintas maneras.

Ejemplo 2:

Dada la ecuación diferencial:

$$\mathbf{\frac{dy}{dx} = 5x + 1}$$

La siguiente expresión es una "**función primitiva**" de la ecuación diferencial:

$$\mathbf{y = \frac{5}{2}x^2 + x + C}$$

Puede demostrarse fácilmente la aseveración anterior pues al derivar la función primitiva se reproduce exactamente la ecuación diferencial.

2.3 ORDEN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL:

El mayor orden de derivadas o de diferenciales presente en una ecuación diferencial se llama "**orden de la ecuación diferencial**".

Ejemplo 3:

Las ecuaciones diferenciales del Ejemplo 1 tienen los siguientes órdenes:

a.	$\frac{dy}{dx} = 5x + 1$	Orden 1 por "**dy/dx**"
b.	$y' = 3(y'')^2 + 5y - 3x + 2$	Orden 2 por "**y**² "
c.	$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x . \partial y} = 0$	Orden 2 por todos los sumandos
d.	$y'' + q.y = 0$	Orden 2 por "**y**² "
e.	$(x + y).dx = (y - x).dy$	Orden 1 por "**dx**" y "**dy**"
f.	$y''' + y'' + y' + y = Sen(3x)$	Orden 3 por "**y**²¢ "
g.	$Sen(x + y).dx + Cos(x - y).dy = 0$	Orden 1 por "**dx**" y "**dy**"
h.	$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} - 3y = 2t^3 - t^2 + 3t - 5$	Orden 2 por "$\mathbf{d^2y/dt^2}$ "
i.	$\frac{d^4y}{dx^4} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + y = e^{3x}$	Orden 4 por "$\mathbf{d^4y/dx^4}$ "

2.4 ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS:

Son ecuaciones que relacionan una función de **una sola variable independiente** con una o más funciones de sus derivadas.

Ejemplo 4:

Las siguientes expresiones son ecuaciones diferenciales ordinarias:

a. $\frac{dy}{dx} = (x^2 + 1).\ln(y)$ ("**x**" es la única variable independiente)

b. $\frac{d^2y}{dx^2} - x \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ ("**x**" es la única variable independiente)

c. $\frac{d^3y}{dt^3} = 2y^2$ ("**t**" es la única variable independiente)

d. $y'' - 2y' - y = x + 1$ ("**x**" es la única variable independiente)

e. $\frac{d^2s}{dt^2} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + s^2 = 2e^t$ ("**t**" es la única variable independiente)

f. $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{E(x).I(x)}$ ("**x**" es la única variable independiente)

2.5 ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES:

Las ecuaciones diferenciales que pueden ser escritas en la siguiente forma se conocen como Ecuaciones Diferenciales Lineales de orden "**n**":

$$\mathbf{a_0(x) \cdot \frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x) \cdot \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_{n-2}(x) \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + a_{n-1}(x) \cdot \frac{dy}{dx} + a_n(x).y = R(x)}$$

Donde:

n: Orden de la ecuación diferencial que es también el mayor orden de las derivadas

$\frac{d^my}{dx^m}$: Derivada de orden "**m**" de la variable "**y**" respecto a "**x**".

$a_{n-m}(x)$: Coeficiente de la derivada de orden "**m**" de la variable "**y**" respecto a "**x**", que contiene exclusivamente expresiones en "**x**".

$R(x)$: Término independiente, que es función exclusiva de "**x**"

Las ecuaciones que no pueden representarse en la forma anterior se conocen como Ecuaciones Diferenciales No Lineales.

Ejemplo 5:

Las siguientes expresiones son ecuaciones diferenciales lineales:

a. $\frac{dy}{dx} = 5x + 1$

b. $y'' + q.y = 0$

c. $y''' + y'' + y' + y = Sen(3x)$

d. $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} - 3y = 2t^3 - t^2 + 3t - 5$

e. $\dfrac{d^4y}{dx^4} + 3\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = e^{3x}$

Ejemplo 6:

Las siguientes expresiones son ecuaciones diferenciales no lineales:

a. $y' = 3(y'')^2 + 5y - 3x + 2$

b. $\sqrt{x^2 + y^2}.dx + (x.y).dy = 0$

c. $(x + y).dx = (y - x).dy$

d. $Sen(x + y).dx + Cos(x - y).dy = 0$

e. $y\dfrac{d^2y}{dt^2} + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 + 3y^3 = Sen(3x)$

2.6 ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES HOMOGÉNEAS:

Son ecuaciones diferenciales lineales cuyo término independiente es nulo, y puede representarse como:

$$\mathbf{a_0(x) \cdot \frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x) \cdot \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + a_{n-2}(x) \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + a_{n-1}(x) \cdot \frac{dy}{dx} + a_n(x).y = 0}$$

Ejemplo 7:

Las siguientes expresiones son ecuaciones diferenciales lineales homogéneas:

a. $y' - y = 0$

b. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3\dfrac{dy}{dt} - 5y = 0$

c. $y''' + 4y'' + y' - 6y = 0$

d. $y' - 2x.y = 0$

e. $\dfrac{d^4y}{dt^4} - \dfrac{d^2y}{dt^2} + 3t^2.y = 0$

2.7 FUNCIONES HOMOGÉNEAS:

Una función "**f(x, y)**" es homogénea de grado "**n**" si:

$$\mathbf{f(l.x, l.y) = l^n.f(x, y)}$$

Si se afecta a las variables de una función homogénea, reemplazando a cada variable por el producto de una constante arbitraria "l" multiplicada por dicha variable, el resultado es la función original multiplicada por la constante escogida elevada a una potencia.

Ejemplo 8:

$$\mathbf{f(x,y) = x^3 + x.y^2}$$

La función es homogénea ya que, al reemplazar "**x**" por "l **.x**" y "**y**" por "l **.y**", cumple lo siguiente:

$$f(\lambda.x, \lambda.y) = (\lambda.x)^3 + (\lambda.x).(\lambda.y)^2$$

Simplificando y destruyendo los paréntesis:

$$f(\lambda.x, \lambda.y) = (\lambda^3.x^3) + (\lambda.x).(\lambda^2.y^2)$$

Destruyendo paréntesis:

$$f(\lambda.x, \lambda.y) = \lambda^3.x^3 + \lambda^3.x.y^2$$

Factorando:

$$f(\lambda.x, \lambda.y) = \lambda^3(x^3 + x.y^2)$$

La expresión entre paréntesis es la función original "**f(x, y)**", por lo que reemplazándola se tiene:

$$\mathbf{f(l.x, l.y) = l^3.f(x,y)}$$

La función es homogénea de grado "**3**" pues el exponente del factor "l" es "**3**".

Ejemplo 9:

$$\mathbf{f(x,y) = x - y + \sqrt{2x.y}}$$

La función es homogénea ya que cumple lo siguiente, al reemplazar "**x**" por "l **.x**" y "**y**" por "l **.y**":

$$f(\lambda.x, \lambda.y) = (\lambda.x) - (\lambda.y) + \sqrt{2(\lambda.x).(\lambda.y)}$$

Simplificando:

$$f(\lambda.x, \lambda.y) = (\lambda.x) - (\lambda.y) + \sqrt{2\lambda^2.x.y}$$

$$f(\lambda.x, \lambda.y) = (\lambda.x) - (\lambda.y) + \lambda\sqrt{2.x.y}$$

Factorando:

$$f(\lambda.x, \lambda.y) = \lambda.(x - y + \sqrt{2.x.y})$$

La expresión entre paréntesis es la función original "**f(x, y)**":

$$\mathbf{f(l.x, l.y) = l.f(x,y)}$$

La función es homogénea de grado "**1**" pues el exponente del factor "λ" es "**1**".

Ejemplo 10:

$$\mathbf{f(x,y) = x^2 - y^2 + 3x.y + 5}$$

La función no es homogénea ya que, al reemplazar "**x**" por "λ**.x**" y "**y**" por "λ**.y**" se tiene:

$$f(\lambda.x, \lambda.y) = (\lambda.x)^2 - (\lambda.y)^2 + 3(\lambda.x).(\lambda.y) + 5$$

Destruyendo paréntesis:

$$f(\lambda.x, \lambda.y) = (\lambda^2.x^2) - (\lambda^2.y^2) + 3(\lambda.x).(\lambda.y) + 5$$

$$f(\lambda.x, \lambda.y) = \lambda^2.x^2 - \lambda^2.y^2 + 3\lambda^2.x.y + 5$$

Agrupando y factorando:

$$f(\lambda.x, \lambda.y) = \lambda^2(x^2 - y^2 + 3.x.y) + 5$$

$$\mathbf{f(\lambda.x, \lambda.y) \neq \lambda^2.f(x,y)}$$

La presencia de la constante "**5**", en el polinomio, no permite que la función sea homogénea, pues es el único término en el que no se puede factorar "λ^2".

2.8 ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES:

Son aquellas que incluyen derivadas de funciones de más de una variable independiente.

Ejemplo 11:

Las siguientes expresiones son ecuaciones diferenciales en derivadas parciales:

a. $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial x.\partial y} = 0$ ("**x**" y "**y**" son las variables independientes)

b. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = u \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x}$ ("**x**" y "**t**" son las variables independientes)

c. $\dfrac{\partial^2 M}{\partial x^2} + 4\dfrac{\partial^2 M}{\partial y^2} = 0$ ("**x**" y "**y**" son las variables independientes)

d. $\dfrac{\partial^2 T}{\partial t^2} = k \cdot \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ ("**x**" y "**t**" son las variables independientes)

2.9 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

➢ Tagle R. Kent, Saff Edward B. y Zinder Artur David, "Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera", Pearson Educación, Tercera Edición, 2001.

- Spiegel Murria R., “Matemáticas Avanzadas para Ingeniería y Ciencias”, Mc Graw Hill, Primera Edición, 2001.
- Campbell Stephen L. y Haberman Richard, “Introducción a las Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Valor de Frontera”, Mc Graw Hill, Primera Edición, 1999.
- Ayres Frank, “Ecuaciones Diferenciales”, Mc Graw Hill, Primera Edición, 2000.