Capítulo VI
PROBLEMAS QUE CONDUCEN AL PLANTEAMIENTO DE ECUACIONES DIFERENCIALES

6.1 PLANTEAMIENTO DE ECUACIONES DIFERENCIALES:

Existen muchos fenómenos naturales o provocados por el hombre que son descritos mediante ecuaciones diferenciales. El fundamento teórico de esos problemas y las condiciones especiales en que se desarrollan permiten plantear las ecuaciones diferenciales correspondientes y las condiciones de borde respectivas.

6.2 MODELAMIENTO DE ECUACIONES DIFERENCIALES MEDIANTE HERRAMIENTAS INFORMÁTICAS:

Existen varios caminos utilizados para modelar Ecuaciones Diferenciales mediante Herramientas Informáticas:

- Software Genérico de Modelamiento de Ecuaciones Diferenciales.
- Software Específico para Resolver un Tipo de Problema, que se describe mediante Ecuaciones Diferenciales.
- Hojas Electrónicas.

Debido a la facilidad de conseguir un programa de Hoja Electrónica, y a la poca complejidad de su uso, los problemas que se resolverán en este capítulo utilizarán tal herramienta.

6.3 PROBLEMAS RESUELTOS:

Problema Resuelto 1:

La población de la ciudad de Quito en el año 2000 fue de 2'000.000 habitantes. Si el crecimiento poblacional es proporcional a la propia población y ha sido estimado en el 1.5 % anual, determinar la ecuación diferencial que describe el problema y la función primitiva equivalente a esa ecuación diferencial; representar gráficamente la variación de la población con el tiempo, basándose en la ecuación diferencial, y mediante dicho gráfico estimar el año en que la ciudad tendrá 3'000.000 de habitantes.

Solución:

En primer lugar definimos las variables que forman parte del problema:

P: Población de la ciudad de Quito, que varía con el tiempo y tiene un valor de 2'000.000 para el año 2000

t: Tiempo medido en años, que al inicio del problema es el año 2000.

α: Índice anual de crecimiento de la población que vale 0.015 (1.5% anual).

En segundo lugar especificamos la expresión diferencial que describe el problema.

Por definición, el crecimiento de la población en un instante cualquiera se calcularía mediante la siguiente expresión:

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} \approx \alpha.P$$

Donde:

ΔP. Incremento de población
Δt: Intervalo de tiempo en que se mide el incremento de población.

Se ha utilizado el símbolo “»” para indicar que la expresión es una aproximación, pues una vez transcurrido un intervalo de tiempo “D**t**”, la población habrá crecido a “**P**+D**P**” por lo que “**P**” ya no sería representativa para el cálculo del incremento de la población .

Para conseguir una igualdad es necesario llevar el cociente de los incrementos al límite del mismo, lo que ocurre cuando “D**t**” tiende a “cero”, lo que se expresa:

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta P}{\Delta t}\right) = \alpha.P$$

La expresión antes anotada es la derivada de la Población respecto al tiempo.

$$\boxed{\frac{\mathbf{dP}}{\mathbf{dt}} = a\,\mathbf{.P}}$$ **Ecuación diferencial**

Esta última expresión es precisamente la ecuación diferencial que describe la variación de la población con respecto al tiempo.

Para resolver la ecuación diferencial se deben separar las diferenciales del miembro izquierdo:

$$dP = \alpha.P.dt$$

Se separan las variables:

$$\frac{dP}{P} = \alpha.dt$$

Se procede a la integración de los 2 miembros:

$$\int \frac{dP}{P} = \int \alpha.dt$$

Ejecutando las integrales:

$$\ln(P) + C = \alpha.t$$

Pero la constante “**C**” puede ser reemplazada por el logaritmo natural de la constante “**k**”:

$$\ln(P) + \ln(k) = \alpha.t$$

El logaritmo del producto es la suma de los logaritmos:

$$\ln(P.k) = \alpha.t$$

Reemplazando la función logarítmica por la función exponencial equivalente:

$$P.k = e^{\alpha.t}$$

Despejando la población “**P**” se tiene su variación en función del tiempo, en términos generales:

$$\boxed{P = \frac{e^{a.t}}{k}}$$ **Solución general**

Para el cálculo de la Solución Específica se deben aplicar las siguientes condiciones de borde a la solución general:

Para el año 2.000, “**t = 2.000 años**”, “**P = 2’000.000 habitantes**”, “a = **0.015 habitantes/año**”. Reemplazando estas condiciones de borde se tiene:

$$2'000.000 = \frac{e^{(0.015).(2000)}}{k}$$

Simplificando:

$$2'000.000 = \frac{e^{30}}{k}$$

Despejando “**k**”:

$$k = \frac{e^{30}}{2'000.000}$$

Reemplazando el valor de “$\mathbf{e^{30}}$”:

$$k = \frac{10''686.474'581.524}{2'000.000}$$

$$k = 5343237$$

Reemplazando “**k**” y “a” en la ecuación general se tiene:

$$\boxed{P = \frac{e^{(0.015).t}}{5343237}}$$ **Solución específica**

Para modelar mediante una hoja electrónica se parte de la ecuación diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha.P$$

Poniendo la misma expresión en términos de los incrementos de las variables se tiene:

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \alpha.P$$

Despejando “D**P**”:

$$\Delta P = \alpha.P.\Delta t$$

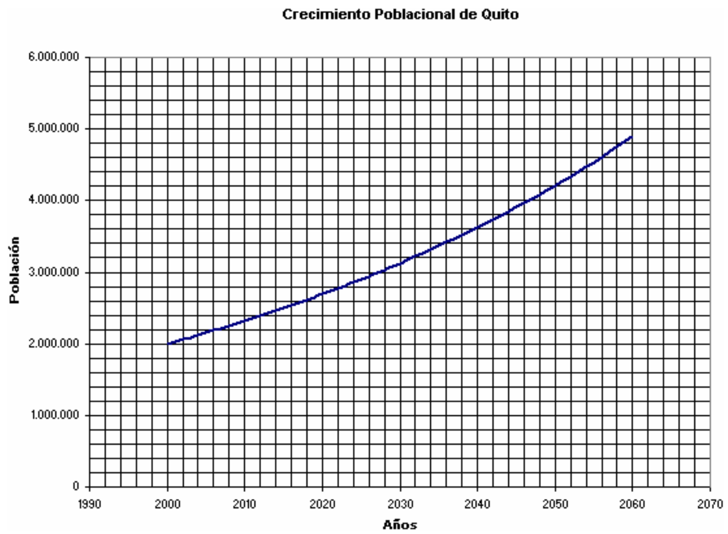
El valor de “$\mathbf{P_i}$” en cualquier instante puede calcularse en base al valor previo de “**P**” ($\mathbf{P_{i-1}}$), mediante la siguiente expresión:

$$P_i = P_{i-1} + \Delta P$$

Llevadas estas expresiones a una hoja electrónica se puede calcular la variación aproximada de la población a lo largo del tiempo (los intervalos de tiempo entre dato y dato son de 1 año, igual al período para el cual es válido el coeficiente “a”):

	A	B	C	D
1	**Crecimiento Poblacional de Quito**			
2	**α = 0,015**			
3				
4	**tiempo**	**Incremento**	**Población**	**Incremento de**
5		**de tiempo**		**Población**
6	**t**	**Δt**	**Pi=Pi-1+Δt**	**ΔP=α.Pi.Δt**
7	**2000**	1	**2.000.000**	30.000
8	2001	1	2.030.000	30.450
9	2002	1	2.060.450	30.907
10	2003	1	2.091.357	31.370
11	2004	1	2.122.727	31.841
12	2005	1	2.154.568	32.319
13	2006	1	2.186.887	32.803
14	2007	1	2.219.690	33.295
15	2008	1	2.252.985	33.795
16	2009	1	2.286.780	34.302
17	2010	1	2.321.082	34.816
18	2011	1	2.355.898	35.338
19	2012	1	2.391.236	35.869
20	2013	1	2.427.105	36.407
21	2014	1	2.463.511	36.953

Graficando la tabla se tiene:



Del gráfico se desprende que aproximadamente en el año 2027 Quito llegará a tener una población de 3’000.000 de habitantes.

NOTA 1: A pesar de que la ecuación diferencial es relativamente simple, la utilización de métodos aproximados para analizar su comportamiento tiene un nivel de complejidad inferior al de la obtención de la función primitiva correspondiente. Es más, la interpretación de las tablas y gráficos es mucho más sencilla que la interpretación de la función primitiva. Estos hechos son más notorios cuando las ecuaciones diferenciales son más complejas, cuando las funciones primitivas son más elaboradas, o cuando no pueden obtenerse analíticamente las funciones primitivas.

NOTA 2: Es importante mencionar que el índice de crecimiento de crecimiento de la población se mide anualmente y la unidad de variación del tiempo es el año. Esa consistencia de unidades es importante en la resolución de este tipo de problemas, caso contrario sería necesario un ajuste “no lineal” del valor de la constante de crecimiento de la población. La no linealidad sería definida por el tipo de solución continua que se obtiene al resolver el problema (en el presente caso una variación exponencial).

Problema Resuelto 2:

Los núcleos de los materiales radioactivos se desintegran parcialmente con el tiempo convirtiéndose en materiales estables no radioactivos. El tiempo que les toma a los materiales radioactivos para que la mitad de sus átomos decaigan en átomos estables se conoce como la “vida media” o “período de semi-desintegración” del material.

El Plutonio 239 tiene una vida media de 25.000 años. Modelar el comportamiento de 1000 gr. de **Pu** mediante una ecuación diferencial, encontrar la función primitiva equivalente a esa ecuación diferencial, representar gráficamente este comportamiento y determinar aproximadamente el tiempo que se requiere para que el 90% del Plutonio haya desaparecido.

Solución:

En primer lugar definimos las variables que forman parte del problema:

m: masa de Plutonio radioactivo, que varía con el tiempo y tiene un valor de “**1000 gr**” para un tiempo “**0**”.

t: Tiempo medido en años, que al inicio del problema es el año “**0**”.

α: Índice de vida media del material radioactivo que “tentativamente” vale 0.00002 (el inverso de 25000 dividido para 2 “0.00002=**[1/25000]/2**”).
Durante el desarrollo del problema determinaremos los ajustes que deberían hacerse al valor “tentativo” del índice de vida media del material radioactivo, y las razones para tal reajuste, así como las razones por las que ese ajuste no puede ser realizado al inicio del problema, sino únicamente cuando se conoce la forma general de la ecuación diferencial y de la solución al problema.

En segundo lugar especificamos la expresión diferencial que describe el problema. Por definición, el decaimiento del material radioactivo se calcularía mediante la siguiente expresión:

$$\boxed{\frac{\mathbf{dm}}{\mathbf{dt}} = -a\,.\mathbf{m}} \quad \textbf{Ecuación diferencial}$$

El signo negativo de “a ” refleja una disminución de la masa con el paso del tiempo. Por otro lado, el hecho de que la variación de la masa (pérdida de la masa) con relación al tiempo es proporcional a la masa instantánea describe exactamente el fenómeno.

Para resolver la ecuación diferencial se deben separar las diferenciales del miembro izquierdo:

$$dm = -\alpha.m.dt$$

Se separan las variables:

$$\frac{dm}{m} = -\alpha.dt$$

Se procede a la integración de los 2 miembros:

$$\int \frac{dm}{m} = \int -\alpha.dt$$

Ejecutando las integrales:

$$\ln(m) + C = -\alpha.t$$

Pero la constante “**C**” puede ser reemplazada por el logaritmo natural de la constante “**k**”:

$$\ln(m) + \ln(k) = -\alpha.t$$

El logaritmo del producto es la suma de los logaritmos:

$$\ln(k.m) = -\alpha.t$$

Reemplazando la función logarítmica por la función exponencial equivalente:

$$k.m = e^{-\alpha.t}$$

Despejando la masa "**m**" de Plutonio se tiene su variación en función del tiempo, en términos generales:

$$\boxed{\mathbf{m} = \frac{\mathbf{e}^{-a.\mathbf{t}}}{\mathbf{k}}}$$ **Solución general**

Para el cálculo de la Solución Específica se deben aplicar las siguientes condiciones de borde a la solución general:

Para el año 0, "**t = 0 años**", "**m = 1000 gr**", "a **=0.00002 gr/año**" (valor tentativo). Reemplazando estas condiciones de borde se tiene:

$$1000 = \frac{e^{-(0.00002).(0)}}{k}$$

Simplificando:

$$1000 = \frac{e^{0}}{k}$$

$$1000 = \frac{1}{k}$$

Despejando "**k**":

$$k = \frac{1}{1000}$$

$$k = 0.001$$

Reemplazando "**k**" y "a" en la ecuación general se tiene:

$$\boxed{\mathbf{m} = \frac{\mathbf{e}^{-0.00002t}}{\mathbf{0.001}}}$$ **Solución específica tentativa**

Para modelar mediante una hoja electrónica se parte de la ecuación diferencial:

$$\frac{dm}{dt} = -\alpha.m$$

Poniendo la misma expresión en términos de los incrementos de las variables se tiene:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = -\alpha.m$$

Despejando "D**m**":

$$\Delta m = -\alpha.m.\Delta t$$

El valor de "$\mathbf{m_i}$" en cualquier instante puede calcularse en base al valor previo de m ("$\mathbf{m_{i-1}}$"), mediante la siguiente expresión:

$$m_i = m_{i-1} + \Delta m$$

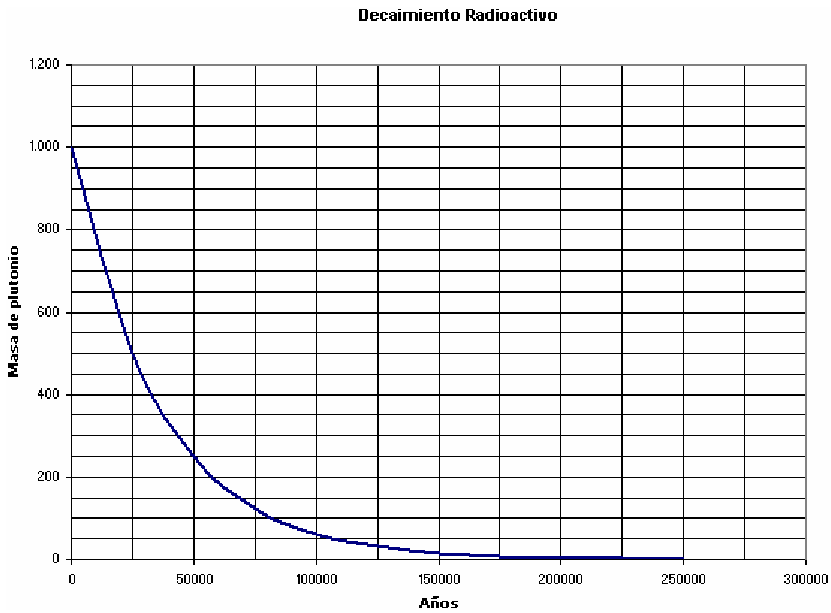
Llevadas estas expresiones a una hoja electrónica se puede calcular la variación aproximada de la masa de plutonio a lo largo del tiempo (los intervalos de tiempo entre dato y dato son de 25000 años, igual al período para el cual es válido el coeficiente "a"):

	A	B	C	D
1	Decaimiento Radioactivo del Plutonio			
2	α = 0,00002			
3				
4	tiempo	Incremento	masa de	disminución
5		de tiempo	plutonio	masa de Pu
6	t	Δt	mi=mi-1+Δm	Δm=-α.mi.Δt
7	0	25000	1.000	-500
8	25000	25000	500	-250
9	50000	25000	250	-125
10	75000	25000	125	-63
11	100000	25000	63	-31
12	125000	25000	31	-16
13	150000	25000	16	-8
14	175000	25000	8	-4
15	200000	25000	4	-2
16	225000	25000	2	-1
17	250000		1	

Es importante observar en la tabla que si el incremento de tiempo entre medición y medición es de 25000 años, en cada período la masa de plutonio se va reduciendo a la mitad, tal como se esperaría en el caso de la vida media de un material radioactivo, de modo que el modelamiento es apropiado.

No siempre es posible conseguir que los intervalos para la medición detallada de un fenómeno coincidan con los intervalos fijados para la definición de ciertos coeficientes claves, por lo que en esos casos será necesario realizar ajustes apropiados.

Graficando la tabla se tiene:



Del gráfico se desprende que aproximadamente transcurridos 80000 años, el 90% de la masa de Plutonio habrá dejado de ser radioactiva por haberse transformado en Plomo (**¡Alquimia!**).

Sin embargo, a continuación presentamos la misma tabla con variaciones de tiempo de 5000 años, donde esperaríamos una mejora en el modelamiento:

	A	B	C	D
1	**Decaimiento Radioactivo del Plutonio**			
2	α = 0,00002			
3				
4	**tiempo**	**Incremento**	**masa de**	**disminución**
5		**de tiempo**	**plutonio**	**masa de Pu**
6	**t**	**Δt**	**mi=mi-1+Δm**	**Δm=-α.mi.Δt**
7	**0**	5000	**1.000**	-100
8	5000	5000	900	-90
9	10000	5000	810	-81
10	15000	5000	729	-73
11	20000	5000	656	-66
12	25000	5000	590	-59
13	30000	5000	531	-53
14	35000	5000	478	-48
15	40000	5000	430	-43
16	45000	5000	387	-39
17	50000	5000	349	-35
18	55000	5000	314	-31
19	60000	5000	282	-28
20	65000	5000	254	-25
21	70000	5000	229	-23
22	75000	5000	206	-21

A diferencia de la tabla con variaciones de 25000 años, al reducir el intervalo entre punto de evaluación y punto de evaluación aparentemente se ha perdido precisión pues en 25000 años (5 períodos de 5000 años), en lugar de perder el 50% de la masa de plutonio se ha perdido solamente el 41%.

El problema de modelamiento es similar al que se presenta cuando un interés compuesto del 12% anual se lo trata de equiparar a un interés compuesto de 1% mensual; en el segundo caso el interés anual equivalente sería del 12.68% ($1.01^{12} - 1 = 1.1268 - 1 = 0.1268$) en lugar del 12% que sirvió como punto de partida. El interés compuesto mensual equivalente a un 12% anual sería solamente de 0.949%, de acuerdo a lo siguiente:

$$(1+\alpha)^{12} = 1.12$$

$$1+\alpha = \sqrt[12]{1.12}$$

$$\alpha = \sqrt[12]{1.12} - 1$$

$$\alpha = 1.00949 - 1$$

$$\alpha = 0.00949$$

Este problema de modelamiento es más importante cuando los períodos establecidos para la definición de los índices son muy diferentes a los períodos utilizados para la evaluación numérica y la graficación.

Por la definición de vida media de un material radioactivo, el valor "**1/2**" o "**0.5**" es el índice de decaimiento del plutonio en **25.000 años**, y si quisiéramos transformarlo en un índice anual de decaimiento —pues por diversas circunstancias la unidad de tiempo que nos conviene manejar es el año— "**NO BASTA que a ese índice lo dividamos para 25.000 (0.5/25000 = 0.00002)**", sino que, al igual que en el interés compuesto "**DEBEMOS BUSCAR LA LEY**" de variación de esa masa, lo que nos permitirá fijar ese índice anual. Esa ley indudablemente no es una función lineal.

La siguiente expresión, aunque errada en el valor de "a ", nos servirá para tal propósito:

$$m = \frac{e^{-0.00002\,t}}{0.001}$$

Que utilizando la forma genérica de "a " se expresa como:

$$m = \frac{e^{-\alpha.t}}{0.001}$$

El objetivo es calcular el verdadero valor de "a" para mediciones anuales.

Reemplazando el valor de la masa y del tiempo a los 25000 años y simplificando se tiene:

$$500 = \frac{e^{-\alpha.(25000)}}{0.001}$$

$$0.5 = e^{-\alpha.(25000)}$$

$$0.5 = e^{-25000\,\alpha}$$

Transformando a una expresión con exponente positivo:

$$0.5 = \frac{1}{e^{25000\,\alpha}}$$

Despejando la expresión que tiene "a":

$$0.5e^{25000\,\alpha} = 1$$

$$e^{25000\,\alpha} = \frac{1}{0.5}$$

$$e^{25000\,\alpha} = 2$$

Calculando logaritmos naturales a los 2 miembros:

$$25000\alpha = \ln(2)$$

Despejando "a":

$$\alpha = \frac{\ln(2)}{25000}$$

Calculando el valor de "a" para variaciones anuales:

$$\alpha = \frac{0.693147}{25000}$$

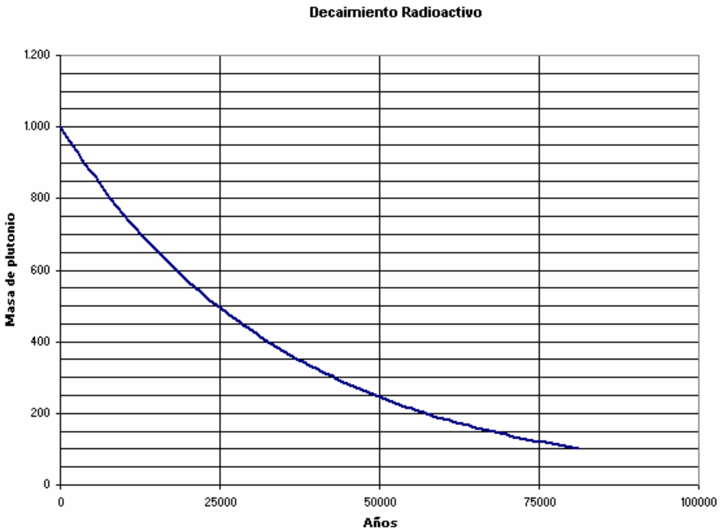
$\boxed{a = \mathbf{0.00002773}}$ Índice anual de decaimiento radioactivo del plutonio

El valor de "a" anual obtenido es bastante diferente a la simple división de "**0.5**" para "**25000**" (**0.00002**).

Reemplazando el valor de "a" en las ecuaciones empleadas en el modelamiento mediante hoja electrónica se tiene la siguiente tabla:

	A	B	C	D
1	**Decaimiento Radioactivo del Plutonio**			
2	**α = 0,00002773**			
3				
4	**tiempo**	**Incremento**	**masa de**	**disminución**
5		**de tiempo**	**plutonio**	**masa de Pu**
6	**t**	**Δt**	**mi=mi-1+Δm**	**Δm=-α.mi.Δt**
7	**0**	1000	**1.000**	-28
8	1000	1000	972	-27
9	2000	1000	945	-26
10	3000	1000	919	-25
11	4000	1000	894	-25
12	5000	1000	869	-24
13	6000	1000	845	-23
14	7000	1000	821	-23
15	8000	1000	799	-22
16	9000	1000	776	-22
17	10000	1000	755	-21
18	11000	1000	734	-20
19	12000	1000	714	-20
20	13000	1000	694	-19
21	14000	1000	675	-19
22	15000	1000	656	-18
23	16000	1000	638	-18
24	17000	1000	620	-17
25	18000	1000	603	-17
26	19000	1000	586	-16
27	20000	1000	570	-16

La masa de plutonio se ha reducido a 495 (una pérdida de 50.5% de masa), que resulta bastante cercano a la definición de vida media del material radioactivo, por lo que los criterios utilizados en el modelamiento ya resultan aceptables.
El gráfico correspondiente es el siguiente:



La inexactitud de la tabla (aunque pequeña) proviene de un índice de vida media calculado para incrementos de 1 año, mientras en la tabla se producen incrementos de 1.000 años.

Problema Resuelto 3:

Un objeto de 1 Kg. es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad de 40 m/seg. Asumiendo que el aire no ofrece ninguna resistencia al objeto, determinar la ecuación diferencial genérica que modela el movimiento y la ecuación específica para las condiciones de borde definidas, determinar la función primitiva equivalente a la ecuación diferencial y compararla con la ecuación que nos proporciona la física cinemática, determinar gráficamente cual es la altura máxima que alcanzará el objeto y el tiempo que le tomará hasta regresar a tierra.

Problema Resuelto 4:

Un objeto de 1 Kg. de masa es lanzado con un ángulo de inclinación "a" con relación a la horizontal, con una velocidad de 40 m/seg.

a) Asumiendo que el aire no ofrece ninguna resistencia al objeto, determinar la ecuación diferencial genérica que modela el movimiento y la ecuación específica para las condiciones de borde definidas, determinar la función primitiva equivalente a la ecuación diferencial y compararla con la ecuación que nos proporciona la física cinemática, determinar gráficamente cual es la altura máxima que alcanzará el objeto, cual es el alcance horizontal, y el tiempo que le tomará hasta caer a tierra.
b) Cambiar el modelo suponiendo que el aire ejerce una fuerza de frenado "**F**" en dirección opuesta al movimiento, y cuya magnitud es igual a "**0.01v**", donde la fuerza "**F**" se mide en Kg y la velocidad "**v**" en m/seg.

Problema Resuelto 5:

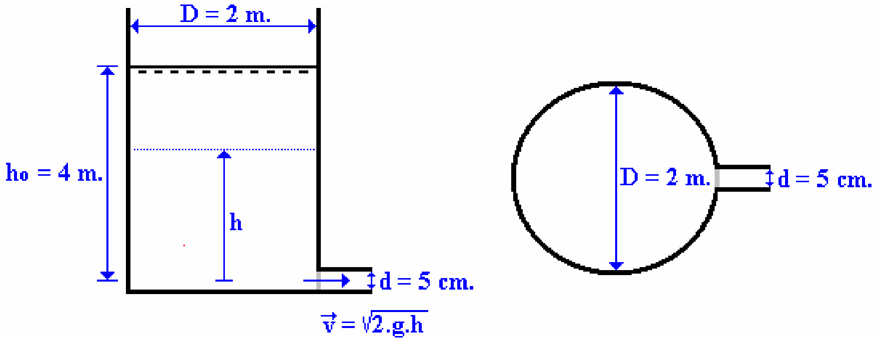
De un resorte vertical se cuelga instantáneamente un cuerpo de 5 Kg. de masa. Si la fuerza de reacción que se genera en el resorte es proporcional al alargamiento del mismo y se la puede calcular mediante la expresión "**0.03y**", donde "**y**" es el alargamiento medido en m. Determinar la ecuación diferencial que modela el fenómeno, y la función primitiva equivalente a esa ecuación diferencial. Determinar gráficamente el alargamiento máximo que alcanza el resorte.

Problema Resuelto 6:

Un tanque circular de 2 m. de diámetro tiene en la parte inferior un tubo de desfogue circular de 4 cm. de diámetro. Cuando el tanque está totalmente vacío se lo empieza a llenar por la parte superior mediante una tubería de caudal constante de 5 lt/seg (0.005 m^3/seg), y en ese mismo instante se abre el desfogue. Si la velocidad con que se desfoga el agua se calcula con la expresión $\sqrt{2.g.h}$, donde "**h**" es la altura de agua en el tanque y "**g**" es la aceleración de la gravedad, determinar la ecuación diferencial que modela la variación de nivel en el tanque. Graficar la variación del nivel en el tiempo y estimar cuanto tiempo se necesita para que el tanque alcance 1 m. de altura de agua.

Problema Resuelto 7:

Encontrar la ecuación diferencial (y las ecuaciones auxiliares) que describe la variación del nivel de agua en el tiempo (variación de "**h**" o de "**h(t)**") en el tanque cilíndrico de almacenamiento de agua de la figura, que tiene un diámetro **D = 2 m.** y una altura inicial del agua $\mathbf{h_o}$ **= 4 m.**, a partir del momento en que se abre la tubería de desfogue inferior con un diámetro **d = 5 cm.**



Solución:

El caudal de salida (caudal es el volumen que circula por una sección en una unidad de tiempo – V/t – y se puede medir en m^3/seg) se calcula multiplicando la velocidad por la sección transversal (m/seg x m^2 = m^3/seg).

$$q_{salida} = v.A_t$$

La velocidad y la sección transversal se calculan con las siguientes expresiones:

$$v = \sqrt{2g.h}$$

$$A_t = \frac{d^2.\pi}{4}$$

Reemplazando en el caudal de salida se tiene:

$$q_{salida} = \sqrt{2g.h}.\frac{d^2.\pi}{4}$$

El caudal instantáneo puede ser definido como la derivada del volumen con relación al tiempo.

$$q = \frac{dV}{dt}$$

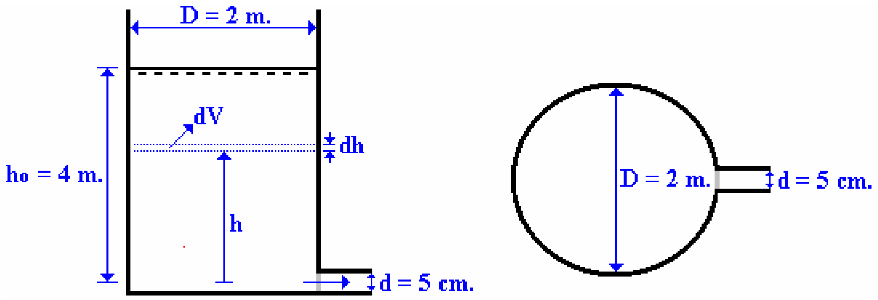
Reemplazando en la expresión anterior se tiene:

$$\frac{dV}{dt} = \sqrt{2g.h}.\frac{d^2.\pi}{4}$$

O la expresión diferencial equivalente:

$$dV = \sqrt{2g.h}.\frac{d^2.\pi}{4}.dt$$

Por otro lado, conforme el agua sale por la tubería de desfogue inferior, en un diferencial de tiempo el volumen de agua del tanque cilíndrico disminuye un diferencial de volumen.



El diferencial de volumen es el diferencial de "**h**" (**dh**) multiplicado por la sección transversal circular "$\mathbf{A_t}$ ", y en este caso particular "$\mathbf{A_t.dh}$" lleva signo negativo por ser una disminución de volumen.

$$dV = -A_t.dh$$

Reemplazando se tiene:

$$dV = -\frac{D^2.\pi}{4}dh$$

Igualando el diferencial de volumen que desciende en el tanque cilíndrico con el diferencial de volumen que sale por la tubería de desfogue, pues la conservación de la materia así lo exige, se tiene:

$$-\frac{D^2.\pi}{4}dh = \sqrt{2g.h}.\frac{d^2.\pi}{4}.dt$$

Simplificando se tiene:

$$-D^2.dh = \sqrt{2g.h}.d^2.dt$$

Dejando el diferencial de "**h**" en el miembro izquierdo:

$$dh = -\frac{d^2}{D^2}\sqrt{2g.h}.dt$$

Expresada como derivadas:

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = -\frac{d^2}{D^2}\sqrt{2g.h}}$$ **Ecuación diferencial solución**

Problema Resuelto 8:

Modelar el problema anterior mediante tablas y gráficos que describan, en el tiempo, la variación de nivel del tanque de almacenamiento de agua "**h(t)**", y determinar mediante simple inspección el tiempo aproximado que se requiere para que el nivel de agua baje de 4 m. a 3 m. de altura, y de 2 m. a 1 m. de altura.
Comentar el resultado de la comparación de esos 2 tiempos aproximados.

Solución:

La ecuación diferencial que describe el problema es:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{d^2}{D^2}\sqrt{2g.h}$$

Que es equivalente a:

$$dh = -\frac{d^2}{D^2}\sqrt{2g.h}.dt$$

Esta ecuación expresada como incrementos se transforma en la siguiente:

$$\Delta h = -\frac{d^2}{D^2}\sqrt{2g.h}.\Delta t$$

O para un intervalo particular:

$$\Delta h_i = -\frac{d^2}{D^2}\sqrt{2g.h}.\Delta t_i$$

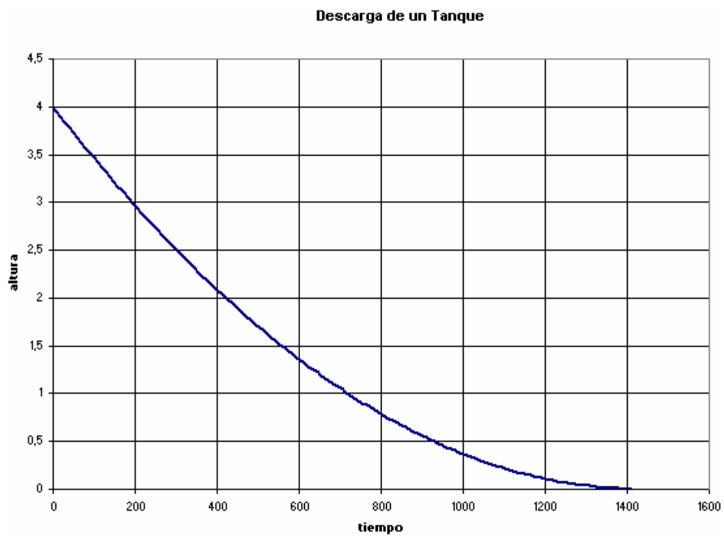
Por otro lado cualquier valor de "$\mathbf{h_i}$" puede ser calculado a partir del valor en el intervalo anterior más el respectivo incremento de "**h**".

$$h_i = h_{i-1} + \Delta h_i$$

Con las últimas dos ecuaciones se puede modelar el problema en una hoja electrónica.

	A	B	C	D	E
1	d=	0,05	m	$\Delta h_i = -\frac{d^2}{D^2}\sqrt{2g.h}.\Delta t_i$	
2	D=	2	m		
3	ho=	4	m		
4	g=	9,8	m/seg2	$h_i = h_{i-1} + \Delta h_i$	
5	Δt=	10	seg		
6					
7					
8	t	Δt	h	Δh	
9	0		4		
10	10	10	3,94466014	-0,05533986	
11	20	10	3,88970443	-0,05495571	
12	30	10	3,83513287	-0,05457156	
13	40	10	3,78094548	-0,05418739	
14	50	10	3,72714226	-0,05380322	
15	60	10	3,67372322	-0,05341903	
16	70	10	3,62068838	-0,05303484	
17	80	10	3,56803774	-0,05265064	
18	90	10	3,51577132	-0,05226642	
19	100	10	3,46388912	-0,0518822	
20	110	10	3,41239116	-0,05149796	
21	120	10	3,36127745	-0,05111372	
22	130	10	3,31054799	-0,05072946	
23	140	10	3,2602028	-0,05034519	
24	150	10	3,21024188	-0,04996091	

El gráfico del modelamiento es:



De la tabla y del gráfico se deduce que el tiempo requerido para descender de 4 m. a 3 m. es de 193 segundos, aproximadamente.

Así mismo, para descender de 2 m. a 1 m. se requiere aproximadamente 300 segundos.

Conforme desciende el nivel del agua en el tanque de almacenamiento, la cantidad de agua que sale por la tubería de desfogue disminuye por lo que cada vez se requerirá una mayor cantidad de tiempo para evacuar la misma cantidad de agua. En realidad la curva es asintótica con el eje de las x.

Problema Resuelto 9:

El sistema de amortiguamiento de un vehículo está constituido por un paquete de resortes elásticos y un amortiguador lineal (la fuerza de amortiguamiento es proporcional a la velocidad con que se mueve el sistema) conectados en paralelo. Modelar el comportamiento de los movimientos verticales del vehículo asumiendo condiciones iniciales compatibles con la circulación a través de un camino ondulante.

6.4 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

- Tagle R. Kent, Saff Edward B. y Zinder Artur David, “Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera”, Pearson Educación, Tercera Edición, 2001.
- Spiegel Murria R., “Matemáticas Avanzadas para Ingeniería y Ciencias”, Mc Graw Hill, Primera Edición, 2001.
- Campbell Stephen L. y Haberman Richard, “Introducción a las Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Valor de Frontera”, Mc Graw Hill, Primera Edición, 1999.
- Ayres Frank, “Ecuaciones Diferenciales”, Mc Graw Hill, Primera Edición, 2000.