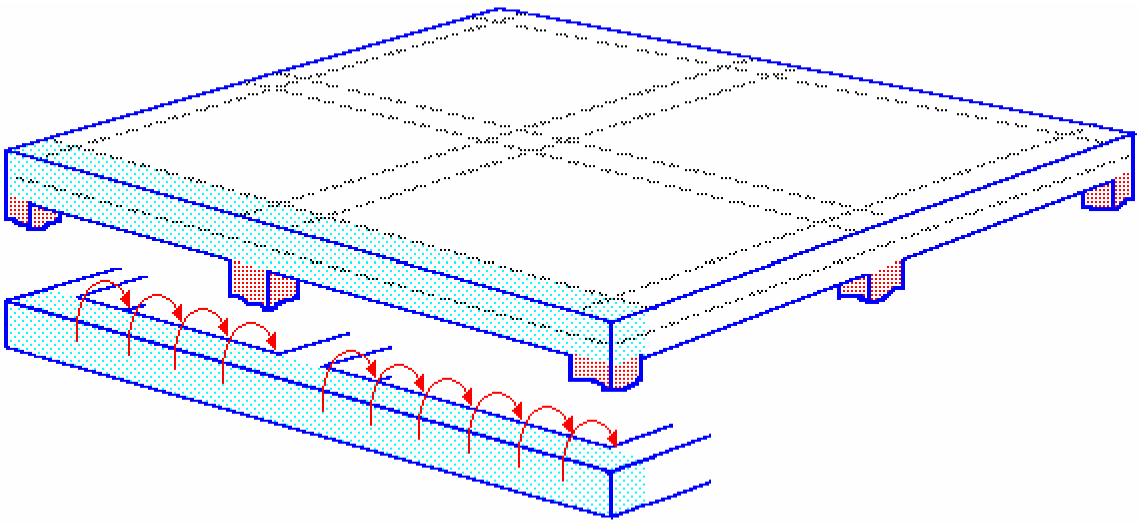
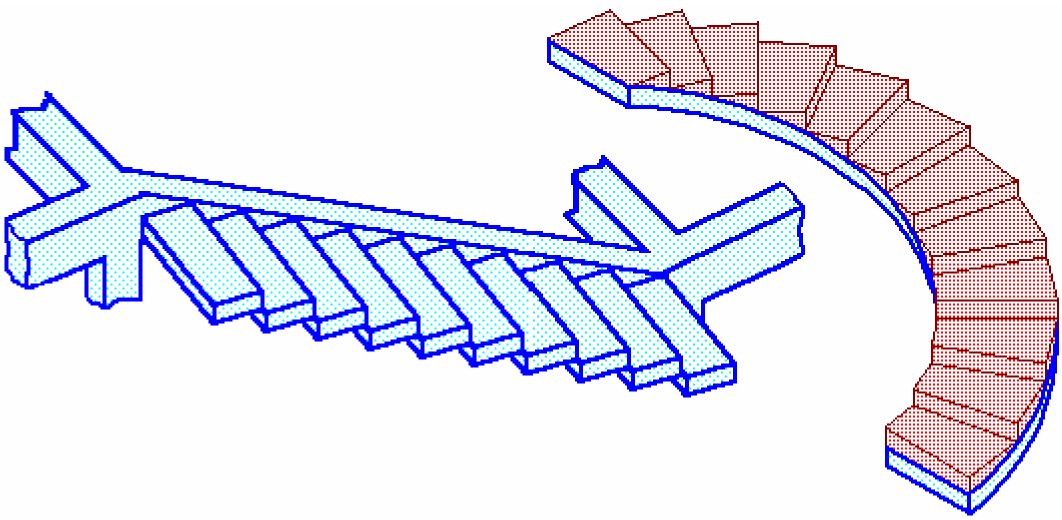
CAPÍTULO XIV
TORSIÓN EN LOS ELEMENTOS DE HORMIGÓN ARMADO

14.1 INTRODUCCIÓN:

Muchas veces, los elementos estructurales, además de estar sometidos a flexión, cortante y cargas axiales, deben resistir solicitaciones torsionales. Por otra parte, muy rara vez se tienen elementos sometidos solamente a momentos torsores.

Las vigas extremas, que sirven de sustento para las losas; las vigas de soporte de gradas en voladizo; y las escaleras helicoidales, son casos clásicos de elementos que están sujetos a momentos torsores.



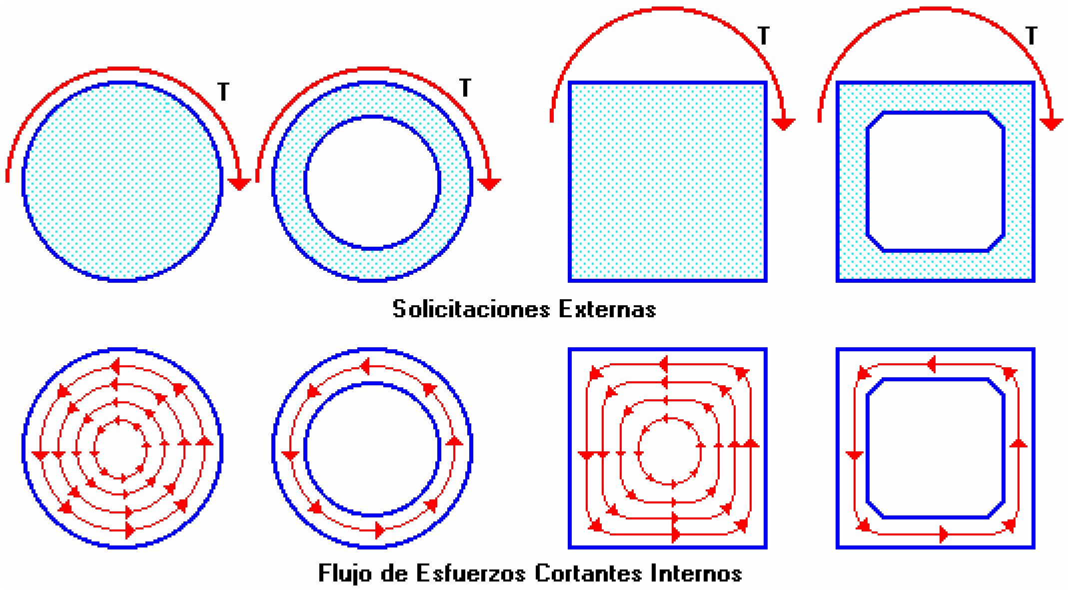


Mientras en las escaleras en voladizo y en las escaleras helicoidales normalmente se toma en consideración el efecto de los momentos torsores, las vigas perimetrales que sirven de sustento a losas casi nunca son diseñadas para resistir solicitaciones torsionales.

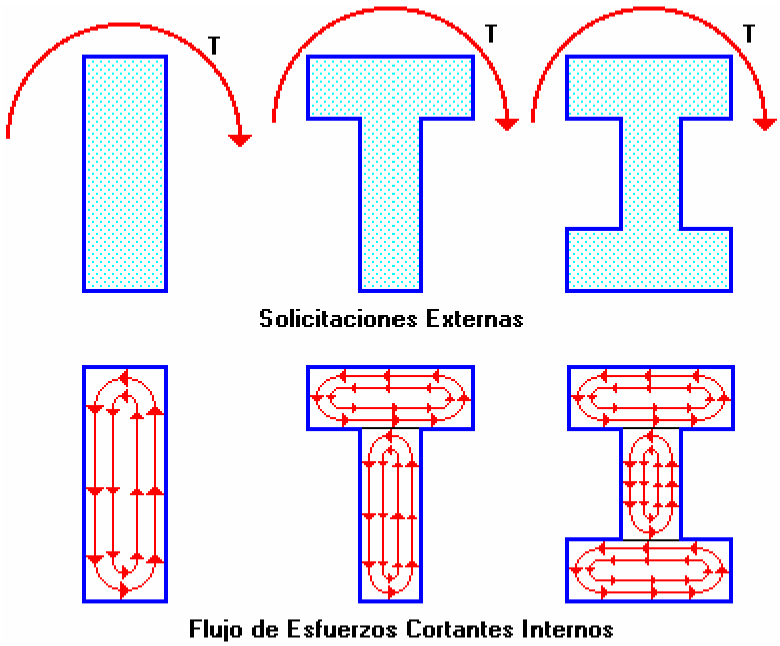
14.2 EL FLUJO DE ESFUERZOS CORTANTES DIAGONALES:

Los momentos torsores que actúan sobre los elementos estructurales son resistidos mediante el flujo de **esfuerzos cortantes diagonales**, de orientación opuesta a las solicitaciones.

Existen secciones transversales sumamente eficientes resistiendo a los momentos torsores como las secciones circulares y los anillos circulares, y en menor proporción las secciones cuadradas y los anillos cuadrados, en las que el flujo de cortante se cierra naturalmente, describiendo círculos o geometrías similares a círculos, por lo que reciben el nombre de **secciones cerradas**.

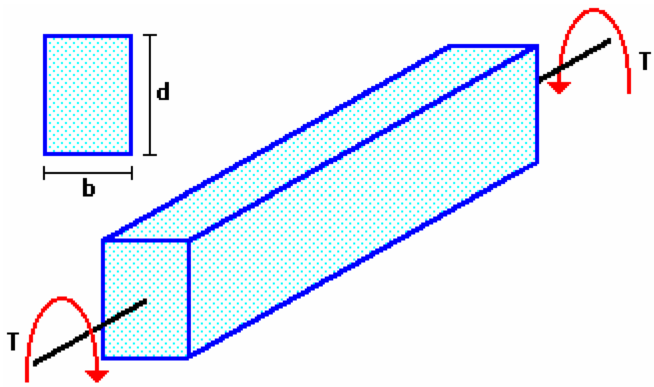


Las secciones rectangulares alargadas, y las secciones compuestas por varios rectángulos alargados que no permiten el cierre natural del flujo de corte, son menos eficientes, recibiendo las últimas el nombre de **secciones abiertas**.

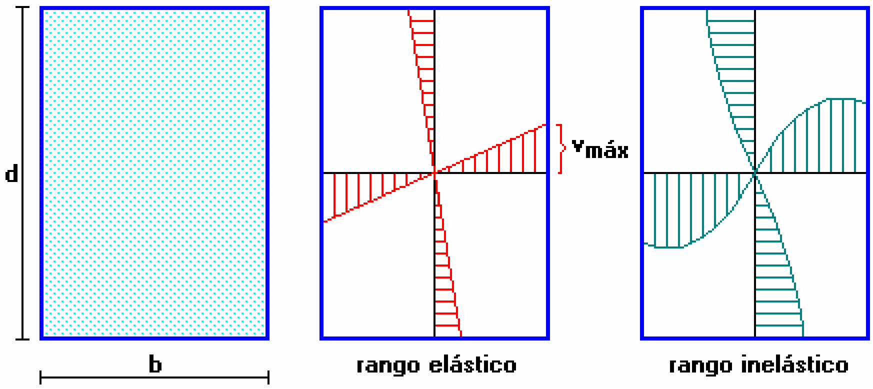


14.3 EL COMPORTAMIENTO ANTE LA TORSIÓN DE LOS ELEMENTOS DE HORMIGÓN ARMADO CON SECCIÓN TRANSVERSAL RECTANGULAR:

Se puede tomar una pieza de hormigón, de sección transversal rectangular (es la de uso más frecuente), cuya dimensión mayor es **d** y cuya dimensión menor es **b**, sometida a momentos torsores **T**.



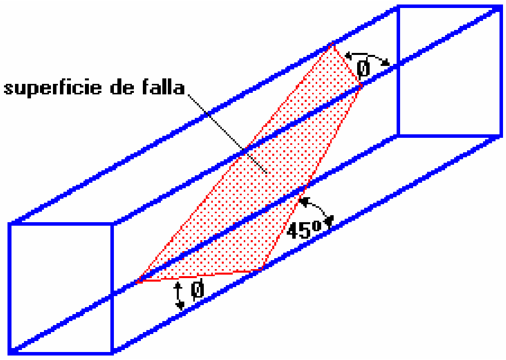
Los esfuerzos cortantes **v** provocados por los momentos torsores pueden ser descritos esquemáticamente mediante los siguientes gráficos:



Se puede observar que:

- Los esfuerzos cortantes por torsión crecen desde el centro de la sección hacia las caras exteriores
- La capacidad resistente a la torsión de la sección depende primordialmente de la magnitud de la dimensión más corta **b**, y
- Los cortantes máximos se producen en la parte central de las caras de mayor longitud.

Si se lleva el elemento estructural propuesto hasta la rotura, ésta se produce mediante una superficie de falla diagonal, que tiende a formar un helicoide en tres de sus caras (una cara larga y dos caras cortas), y cierra la superficie de corte en la cuarta cara. La superficie de falla tiene ángulos característicos en cada una de las tres caras helicoidales, donde una de las caras (la de mayor longitud) presenta una fisura que forma un ángulo de aproximadamente **45 °** con el eje longitudinal, y las dos caras restantes del helicoide presentan una fisura con un ángulo f con respecto al eje longitudinal, aproximadamente igual en las dos caras. El ángulo f está comprendido entre **45°** y **90°**.



Para controlar las fisuras provocadas por las solicitaciones torsionales, además de la capacidad resistente del hormigón simple, puede ser necesario el proveer estribos cerrados transversales, y varillas longitudinales ubicadas en todas las caras de la sección, lo que permite coser y estabilizar las fisuras.

14.4 DISEÑO COMBINADO A LA TORSIÓN Y AL CORTE:

Debido a que la torsión se transforma en esfuerzos cortantes diagonales, en el diseño de los elementos estructurales se deben tomar en consideración simultáneamente las fuerzas cortantes y los momentos torsores.

En secciones transversales genéricas, el esfuerzo cortante último causado por la torsión $\mathbf{v_{tu}}$ se calcula mediante la siguiente expresión:

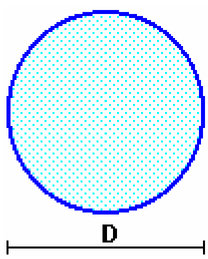
$$\mathbf{v_{tu}} = \frac{\mathbf{Tu}}{\phi.\mathbf{W_t}}$$

Donde:

v_{tu}: esfuerzo cortante último generado por la torsión
Tu: momento torsor último
W_t: módulo resistente a torsión
ϕ: factor de reducción de capacidad a la torsión, cuyo valor es **0.85**

En secciones circulares, el módulo resistente a torsión $\mathbf{W_t}$ se calcula con la siguiente expresión:

$$W_t = \frac{\pi.D^3}{16}$$

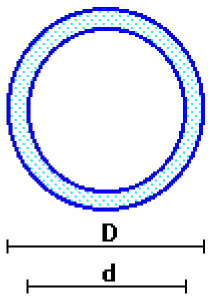


Donde:

D: diámetro de la sección circular

En anillos circulares, el módulo resistente a torsión $\mathbf{W_t}$ se calcula con la siguiente expresión:

$$W_t = \frac{\pi.(D^3 - d^3)}{16}$$

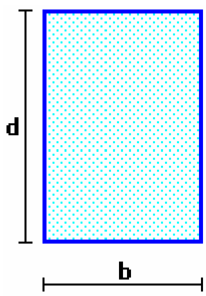


Donde:

D: diámetro exterior del anillo circular
d: diámetro interior del anillo circular

La solución al problema de las secciones rectangulares fue propuesta por Barré de Saint-Venant, pero no es descrita mediante una expresión exacta para el módulo de torsión $\mathbf{W_t}$, pudiendo emplearse la siguiente expresión aproximada, utilizada por los códigos de diseño, la misma que presenta mejores aproximaciones cuando **d/b** tiene valores grandes:

$$W_t = \frac{b^2.d}{3}$$



Donde:

b: menor dimensión de la sección transversal rectangular
d: mayor dimensión de la sección transversal rectangular

Una expresión más refinada, pero aún así todavía aproximada, para secciones transversales rectangulares, es la siguiente:

$$W_t = \frac{b^2.d}{3}\left\{1 - 2.15\frac{b}{d}\left[1 - \frac{b^{1/8}}{1.212d^{1/8}}\right]\right\}$$

De acuerdo a la primera expresión para $\mathbf{W_t}$, en secciones rectangulares, el esfuerzo cortante último causado por la torsión $\mathbf{v_{tu}}$ se puede calcular mediante la siguiente expresión, que aparece en los códigos:

$$\mathbf{v_{tu}} = \frac{\mathbf{3Tu}}{\phi\,\mathbf{.b^2.d}}$$

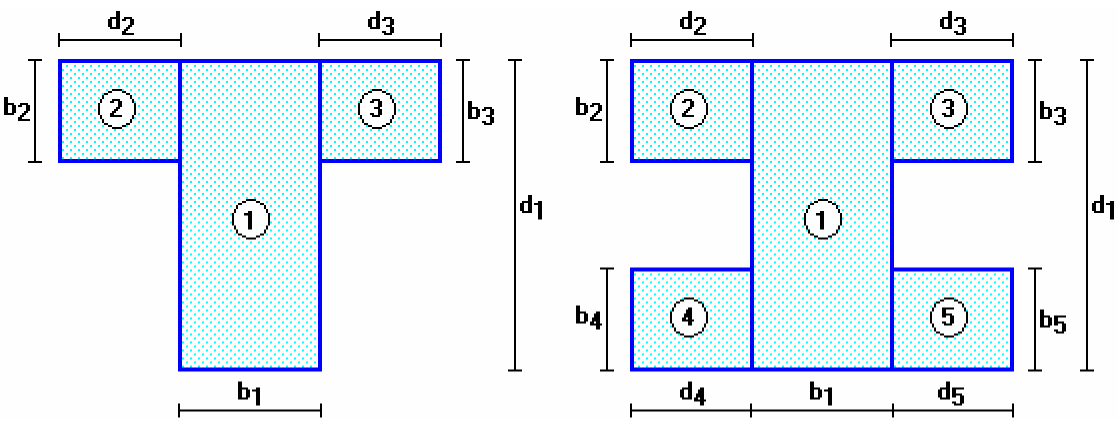
Cuando una sección transversal puede ser dividida en varias secciones rectangulares, el módulo resistente a torsión $\mathbf{W_t}$ puede calcularse con la siguiente expresión:

$$W_t = \sum\left(\frac{b^2.d}{3}\right)$$

La expresión anterior debe ser el mayor de todos los posibles valores que se obtienen al dividir la sección transversal en rectángulos de área positiva.

En ese caso el esfuerzo cortante último $\mathbf{v_{tu}}$ se calcula con la siguiente expresión:

$$\mathbf{v_{tu}} = \frac{\mathbf{3Tu}}{\phi\,.\sum_{i=1}^{n}(b_i^2.d_i)}$$



Donde:

b_i: menor dimensión del rectángulo **i**
d_i: mayor dimensión del rectángulo **i**

La longitud efectiva de las alas de este tipo de secciones transversales no deben superar a tres veces el espesor de dichas alas:

$$d_2 \le 3b_2$$
$$d_3 \le 3b_3$$

Cuando el esfuerzo cortante último por torsión $\mathbf{v_{tu}}$, calculado con las ecuaciones anteriores, no excede de $\mathbf{0.4\sqrt{f'c}}$, los códigos permiten ignorar el efecto de los momentos torsores pues el hormigón se considera capaz de resistir ese nivel de solicitaciones sin necesidad de refuerzo de acero adicional al especificado para corte y para flexión.

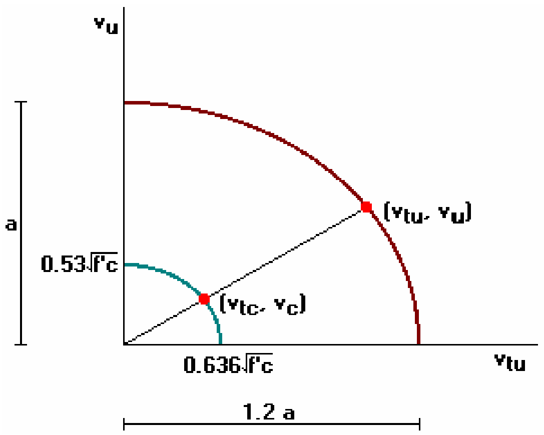
Cuando el esfuerzo cortante último por torsión $\mathbf{v_{tu}}$, sobrepasa $\mathbf{0.4\sqrt{f'c}}$, la capacidad resistente nominal a corte por torsión del hormigón simple $\mathbf{v_{tc}}$ depende del nivel de esfuerzos cortantes $\mathbf{v_u}$, y del esfuerzo cortante por torsión $\mathbf{v_{tu}}$, y se calcula con la siguiente expresión:

$$v_{tc} = \frac{0.636\sqrt{f'c}}{\sqrt{1+\left(\frac{1.2v_u}{v_{tu}}\right)^2}}$$

Bajo esas mismas circunstancias, el esfuerzo nominal resistente a corte se calcula mediante la siguiente expresión:

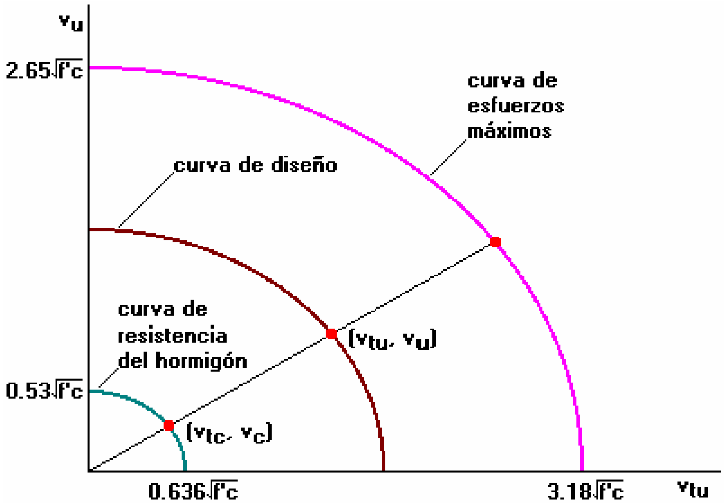
$$v_c = \frac{0.53\sqrt{f'c}}{\sqrt{1+\left(\frac{v_{tu}}{1.2v_u}\right)^2}}$$

Las dos ecuaciones anteriores se interpretan como que la resistencia nominal del hormigón simple a cortante puro es $\mathbf{0.53\sqrt{f'c}}$, mientras que la resistencia nominal a cortante por torsión pura es $\mathbf{0.636\sqrt{f'c}}$. Cualquier estado tensional combinado (fuerzas cortantes más momentos torsores) se describe por una elipse base que tiene las dos magnitudes como radios principales, y una elipse de diseño, múltiplo de la elipse base, que superpone los dos tipos de solicitaciones.



El factor **1.2** que multiplica a $\mathbf{v_u}$ es el resultado de que la distribución de cortantes en una sección transversal rectangular no es uniforme como presupone la fórmula de cálculo del esfuerzo nominal $\mathbf{v_u}$, establecida en los códigos, sino que está descrita por una parábola. Las deformaciones producidas por la distribución parabólica son **1.2** veces mayores que las que se presentan con una distribución constante. Este factor de 1.2 también se ve reflejado en que la resistencia nominal del hormigón a corte por torsión $v_{tc} = 0.636\sqrt{f'c}$ es 1.2 veces mayor que la resistencia nominal a corte puro $v_c = 0.53\sqrt{f'c}$.

Las solicitaciones máximas que pueden resistir las secciones rectangulares de hormigón armado, incluida la colaboración del refuerzo de acero, también están controladas por una elipse proporcional a las anteriores, en las que el esfuerzo máximo que se admite a corte puro es $\mathbf{2.65\sqrt{f'c}}$ y el esfuerzo máximo a corte por torsión es $\mathbf{3.18\sqrt{f'c}}$. Esta nueva elipse es 5 veces mayor que la elipse base.



La expresión que define el mayor esfuerzo que puede resistir una sección rectangular reforzada longitudinal y transversalmente con acero es la siguiente:

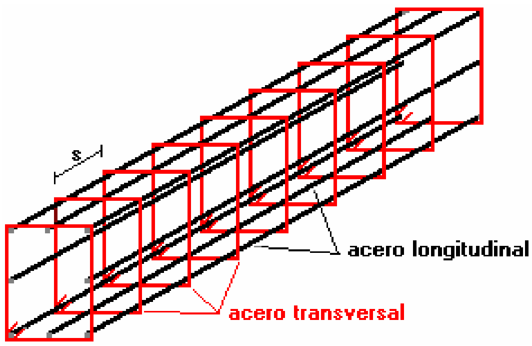
$$\mathbf{v_{tu}} \le \frac{\mathbf{3.18\sqrt{f'c}}}{\sqrt{\mathbf{1} + \left(\dfrac{\mathbf{1.2v_u}}{\mathbf{v_{tu}}}\right)^2}}$$

Una expresión de más fácil manejo que incluye la combinación de cortante y torsión es:

$$\sqrt{(\mathbf{1.2v_u})^2 + (\mathbf{v_{tu}})^2} \le \mathbf{3.18\sqrt{f'c}}$$

La zona crítica a cortante por torsión (cercana a los apoyos en pórticos espaciales) generalmente ocupa la misma posición que la posición crítica a cortante puro. Todas las secciones comprendidas entre la zona crítica y los apoyos se diseñarán para las solicitaciones que actúan en la zona crítica a torsión.

Cuando el esfuerzo cortante último por torsión $\mathbf{v_{tu}}$ supera al esfuerzo cortante por torsión que puede resistir el hormigón $\mathbf{v_{tc}}$, los elementos estructurales requerirán de refuerzo transversal en forma de estribos rectangulares cerrados, y refuerzo longitudinal en forma de varillas en las cuatro caras, para resistir el exceso de esfuerzos ($\mathbf{v_{tu} - v_{tc}}$), simultáneamente.



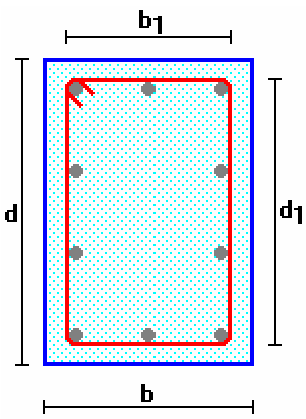
En secciones rectangulares, la armadura transversal (estribos cerrados) que se requiere para resistir a los momentos torsores se calcula con la siguiente expresión:

$$A_t = \frac{(v_{tu} - v_{tc}).s.b^2.d}{3\alpha_t.b_1.d_1.Fy}$$

$$\alpha_t = 0.66 + 0.33\frac{d_1}{b_1} \leq 1.50$$

Donde:

A_t: sección transversal de un ramal de estribo
s: espaciamiento longitudinal entre estribos
b: dimensión exterior menor de la sección transversal rectangular
d: dimensión exterior mayor de la sección transversal rectangular
α_t: factor de forma del rectángulo
b_1: dimensión menor del estribo rectangular, medida centro a centro
d_1: dimensión mayor del estribo rectangular, medida centro a centro
Fy: esfuerzo de fluencia del acero



Con el objeto de controlar la fisuración espiral, la separación máxima entre estribos cerrados no debe superar las siguientes expresiones:

$$s \leq \frac{b_1 + d_1}{4}$$

$$s \leq 30 \text{ cm}$$

El acero longitudinal requerido está definido por la mayor de las siguientes expresiones:

$$A_L = 2A_t\frac{b_1 + d_1}{s}$$

$$A_L = \left[\frac{28.1(b.s)}{Fy}\left(\frac{v_{tu}}{v_{tu} + v_u}\right) - 2A_t\right]\left(\frac{b_1 + d_1}{s}\right)$$

Donde:

A_L: sección total de acero longitudinal (total de las cuatro caras)

La primera de las dos expresiones pretende que exista el mismo volumen de refuerzo longitudinal y de refuerzo transversal.

El acero longitudinal calculado con las dos fórmulas anteriores no requiere superar la siguiente expresión:

$$A_L \le \left(\frac{3.52 b_w .s}{Fy}\right)\left(\frac{b_1 + d_1}{s}\right)$$

Donde:

b_w: ancho del alma resistente al corte

El acero longitudinal se debe distribuir uniformemente en el perímetro del rectángulo.

Cuando se tiene una sección transversal que puede ser descompuesta en varios rectángulos, las dos expresiones que definen el acero transversal requerido en cada rectángulo son:

$$A_{t,i} = \frac{(v_{tu} - v_{tc}).s.\sum_{i=1}^{n}(b_i^2.d_i)}{3\alpha_{t,i}.b_{1,i}.d_{1,i}.Fy}$$

$$\alpha_{t,i} = 0.66 + 0.33\frac{d_{1,i}}{b_{1,i}} \le 1.50$$

Donde:

$A_{t,i}$: sección transversal de un ramal de estribo del rectángulo **i**
b_i: dimensión menor del rectángulo **i** de la sección transversal
d_i: dimensión mayor del rectángulo **i** de la sección transversal
$\alpha_{t,i}$: factor de forma del rectángulo **i**
$b_{1,i}$: dimensión menor del estribo del rectángulo **i**, medida centro a centro
$d_{1,i}$: dimensión mayor del estribo del rectángulo **i**, medida centro a centro

Las expresiones que definen el acero longitudinal son:

$$A_{L,i} = 2A_{t,i}\frac{b_{1,i} + d_{1,i}}{s}$$

$$A_{L,i} = \left[\frac{28.1(b.s)}{Fy}\left(\frac{v_{tu}}{v_{tu} + v_u}\right) - 2A_{t,i}\right]\left(\frac{b_{1,i} + d_{1,i}}{s}\right)$$

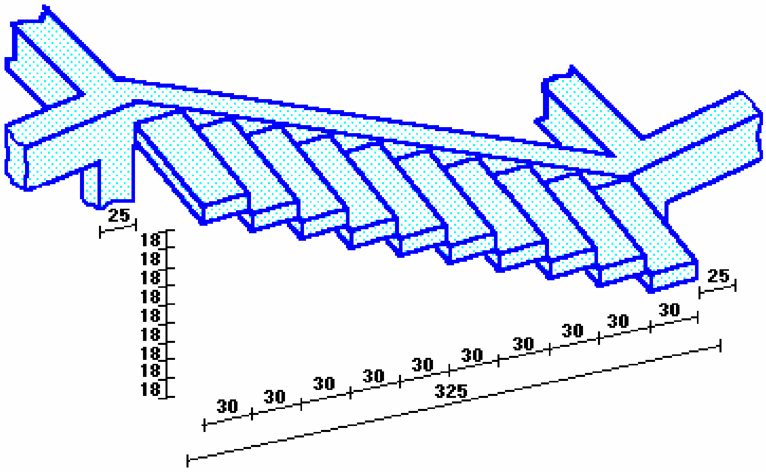
$$A_L \le \frac{3.52 b_w .s}{Fy} \times \frac{b_1 + d_1}{s}$$

Donde:

$A_{L,i}$. acero longitudinal
b_w: ancho del alma resistente al corte

EJEMPLO 14.1:

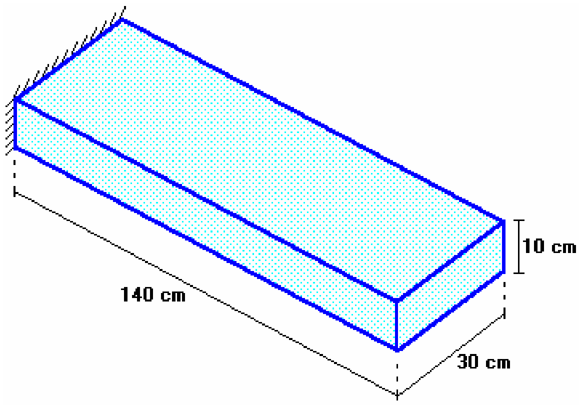
Diseñar la siguiente escalera con gradas en voladizo si f'c = 210 Kg/cm^2 y Fy = 4200 Kg/cm^2.



Las gradas en voladizo tienen una longitud libre de 1.40 m; la sección transversal de las gradas es constante y mide 30 cm de ancho x 10 cm de altura. La viga de torsión tentativamente tiene una sección transversal cuadrada (es la más eficiente) de 30 cm de ancho x 30 cm de altura, y se supone torsionalmente empotrada en los nudos extremos (en realidad debería realizarse un análisis espacial de la estructura total para definir el diagrama de momentos torsores en la viga, pero por fines académicos se ha realizado esta simplificación).

a. <u>Diseño de los Escalones de Hormigón Armado:</u>

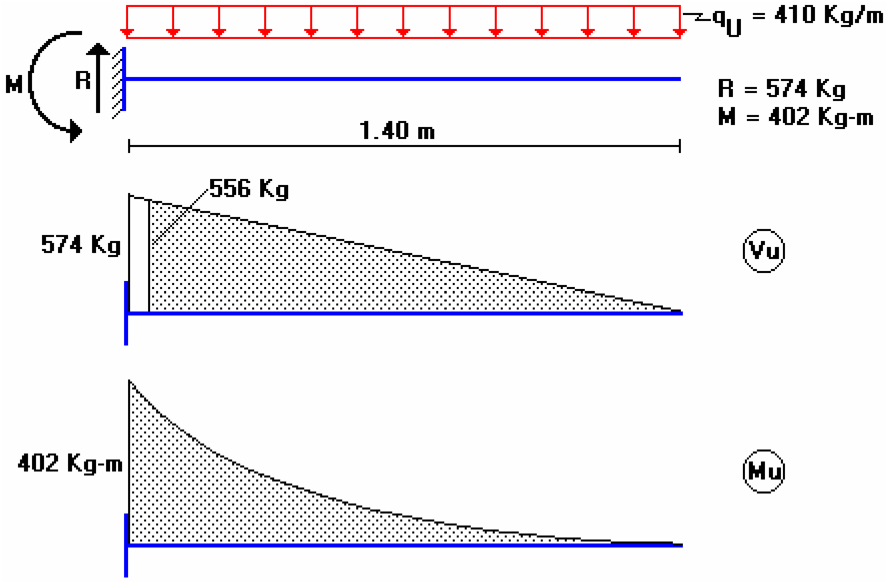
- **Cargas sobre los Escalones:**



Peso propio: 0.30 x 0.10 x 1.00 x 2400 =	72 Kg/m
Enlucido y masillado: 0.30 x 0.04 x 1.00 x 2200 =	26 Kg/m
Revestimiento en madera: 0.30 x 0.015 x 1.00 x 1600 =	7 Kg/m
Pasamanos:	5 Kg/m
Carga Permanente:	**110 Kg/m**
Carga Viva: (0.30 x 1.00) x 500 =	**150 Kg/m**
Carga Ultima: (1.4 x 110) + (1.7 x 150) =	**410 Kg/m**

- **Diagramas de Cargas, de Cortes y Momentos Flectores:**

Los diagramas de cargas, de cortes y de momentos flectores de un escalón de hormigón armado son:



- **Diseño a Corte:**

El esfuerzo cortante nominal que resiste el hormigón del escalón es:

$$v_c = 0.53\sqrt{f'c} = 0.53\sqrt{210}$$

$v_c = 7.68\ Kg/cm^2$

El esfuerzo cortante último es:

$$v_u = \frac{Vu}{\phi.b.d} = \frac{556Kg}{(0.85)(30cm)(5.5cm)}$$

$v_u = 3.96\ Kg/cm^2 < v_c$ (O.K.)

El hormigón es capaz de resistir el esfuerzo cortante.

- **Diseño a Flexión:**

El cálculo de la sección de acero requerida se lo puede realizar mediante la siguiente expresión:

$$As = \frac{0.85f'c.b.d}{Fy}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{2Mu}{0.85\phi.f'c.b.d^2}}\right]$$

f'c = 210 Kg/cm2
Fy = 4200 Kg/cm2
b = 30 cm
d = 5.5 cm
ϕ = 0.90
Mu = 402 Kg-m = 40200 Kg-cm

$$As = \frac{0.85(210)(30)(5.5)}{4200}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{2(40200)}{0.85(0.90)(210)(30)(5.5)^2}}\right]$$

$As = 2.32 \text{ cm}^2$

La cuantía mínima de armado es

$\rho_{mín} = 14/Fy = 14/4200$
$\rho_{mín} = 0.003333$

La cantidad mínima de acero es:

$As_{mín} = \rho_{mín} \cdot b \cdot d = (0.003333)\ (30 \text{ cm})\ (5.5 \text{ cm})$
$As_{mín} = 0.55 \text{ cm}^2$

La cuantía balanceada es:

$$\rho_b = 0.85\beta_1\left(\frac{f'c}{Fy}\right)\frac{0.003}{\frac{Fy}{Es} + 0.003} = 0.85(0.85)\left(\frac{210}{4200}\right)\frac{0.003}{\frac{4200}{2100000} + 0.003}$$

r_b = **0.0217**

La cuantía máxima de armado (las gradas en voladizo son horizontales, estáticamente determinadas y no absorven fuerzas sísmicas) es:

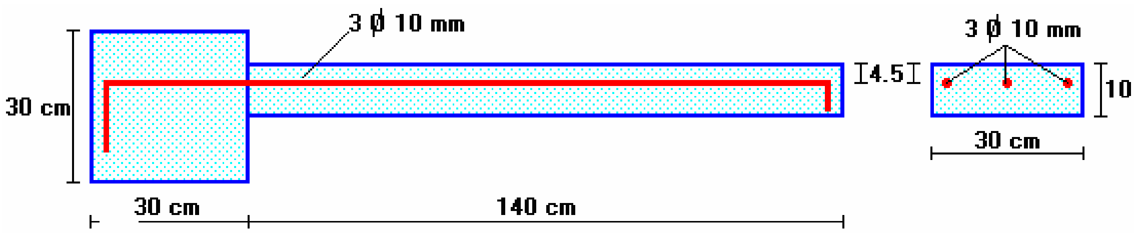
$\rho_{máx} = 0.75\ \rho b = 0.75\ (0.0217) = 0.0163$

La armadura máxima es:

$As_{máx} = \rho_{máx} \cdot b \cdot d = (0.0163)\ (30)\ (5.5) = 2.69 \text{ cm}^2$

Dado que la armadura calculada está comprendida entre la armadura mínima y máxima, el diseño es aceptable:

As = 2.32 cm²
As = 3 varillas de 10 mm de diámetro



b. <u>Diseño de la Viga de Torsión:</u>

- **Cargas Provenientes de los Escalones:**

Peso de un escalón: (110 Kg/m) (1.40 m) =	154 Kg
Carga viva sobre un escalón: (150 Kg/m) (1.40 m) =	210 Kg

- **Cargas Sobre la Viga de Torsión:**

Peso propio de la viga: 0.30 x 0.30 x 1.00 x 2400 = 216 Kg/m
Carga permanente de los escalones: (110Kg/m)(1.40m)/(0.30m) = 513 Kg/m

Carga permanente de flexión: 729 Kg/m

Momento torsor permanente por escalón: (110Kg/m)(1.40m)^2/2 = 108 Kg-m
Carga permanente de torsión por metro: (108Kg-m)/(0.30m) = 360 Kg-m / m

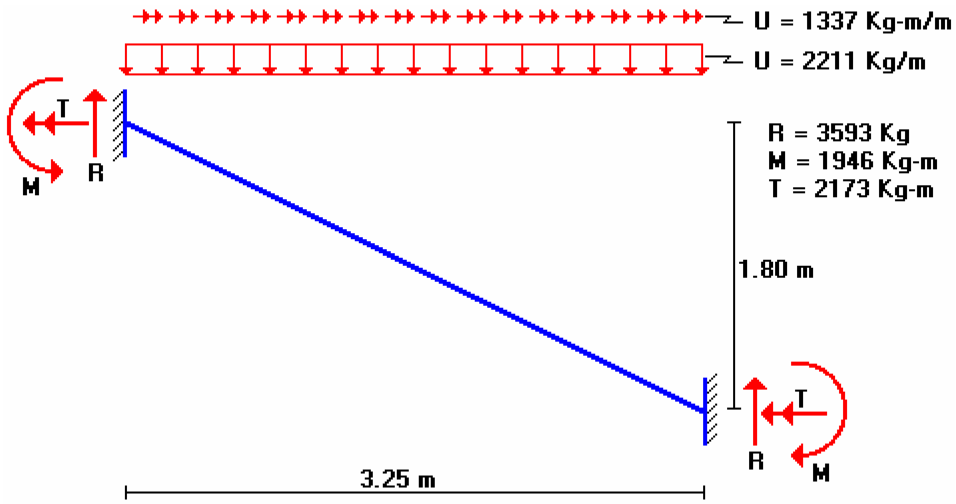
Carga viva de flexión: (150 Kg/m) (1.40 m) / (0.30 m) = 700 Kg/m

Momento torsor vivo por escalón: (150 Kg/m) (1.40 m)^2 / 2 = 147 Kg-m
Carga viva de torsión por metro: (147 Kg-m) / (0.30 m) = 490 Kg-m / m

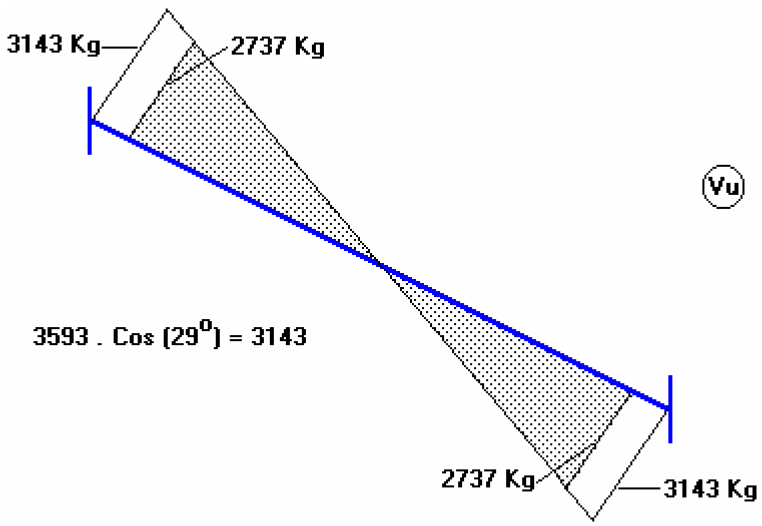
Carga última de flexión: 1.4 (729) + 1.7 (700) = 2211 Kg/m

Carga última de torsión: 1.4 (360) + 1.7 (490) = 1337 Kg-m/m

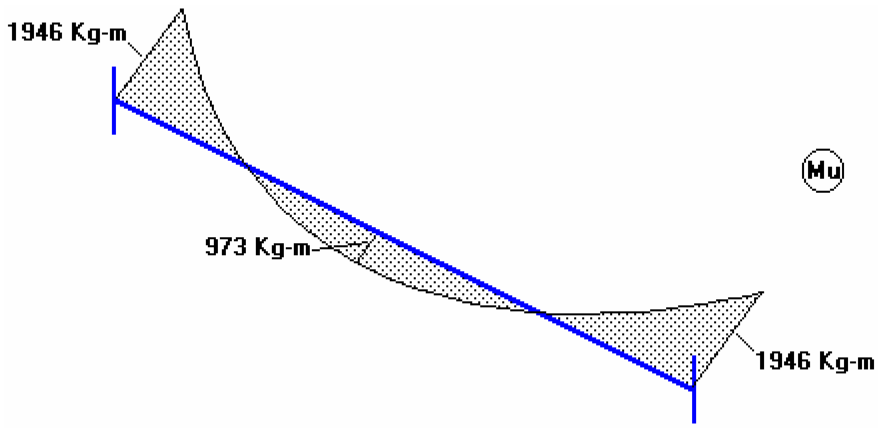
- **Modelo Estructural Idealizado y Reacciones de Apoyo:**



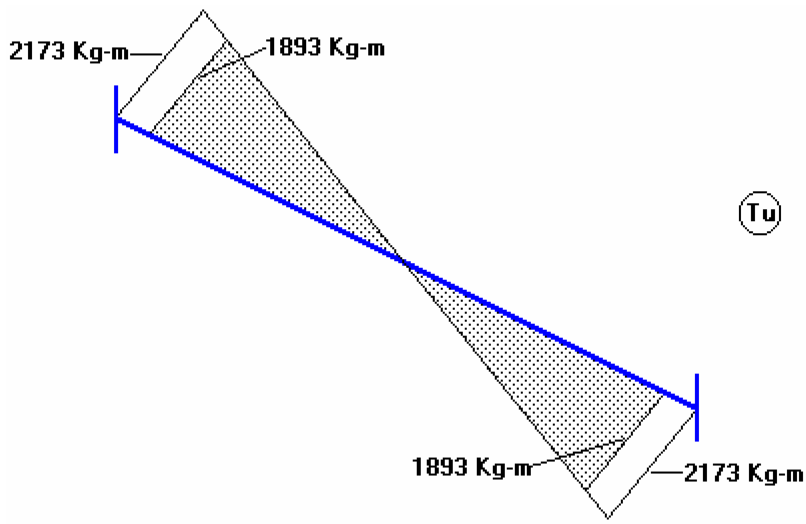
- **Diagrama de Cortes:**



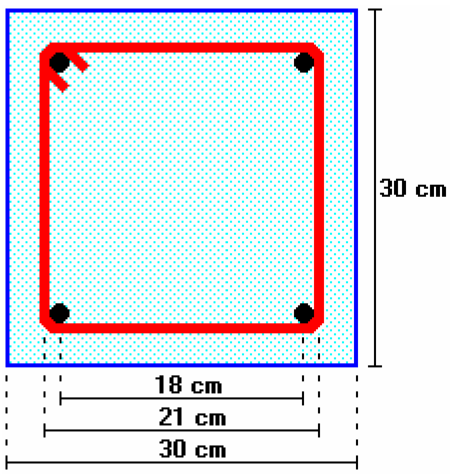
- **Diagrama de Momentos Flectores:**



- **Diagrama de Momentos Torsores:**



- **Dimensiones Transversales Básicas de la Viga de Torsión:**



- **Diseño a Flexión de la Viga de Torsión:**

⇒ **Armadura mínima positiva y negativa:**

b = 30 cm
h = 30 cm
d = h - 6 cm = 30 cm - 6 cm = 24 cm
Fy = 4200 Kg/cm^2
$\rho_{mín}$ = 14/Fy = 14/4200 = 0.003333
$As_{mín} = \rho_{mín}$. b . d = (0.003333) (30) (24) = 2.40 cm^2

⇒ **Armadura negativa:**

f'c = 210 Kg/cm^2
ϕ = 0.90 (flexión)
Mu(-) = 1946 Kg-m = 194600 Kg-cm

$$As = \frac{0.85(210)(30)(24)}{4200}\left[1-\sqrt{1-\frac{2(194600)}{0.85(0.90)(210)(30)(24)^2}}\right]$$

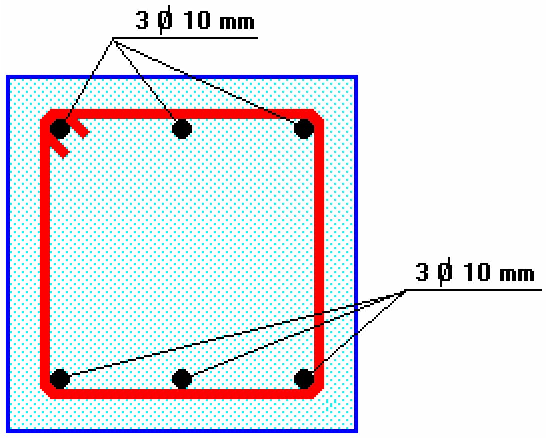
As(-) = 2.23 cm^2 < $As_{mín}$
As(-) = $As_{mín}$ = 2.40 cm^2
As(-) = 3 f 10 mm

⇒ **Armadura positiva:**

Mu(+) = 973 Kg-m = 97300 Kg-cm

$$As = \frac{0.85(210)(30)(24)}{4200}\left[1-\sqrt{1-\frac{2(97300)}{0.85(0.90)(210)(30)(24)^2}}\right]$$

As(+) = 1.09 cm^2 < $As_{mín}$
As(+) = $As_{mín}$ = 2.40 cm^2
As(+) = 3 f 10 mm



- **Cálculo de Esfuerzos de Corte y Torsión para Diseño:**

⇒ **Cálculo del esfuerzo cortante último:**

b = 30 cm
h = 30 cm
d = h - 6cm = 30 cm - 6 cm = 24 cm
ϕ = 0.85 (corte)
Vu = 2737 Kg

$$v_u = \frac{V_u}{\phi.b.d} = \frac{2737}{(0.85)(30)(24)}$$

$\mathbf{v_u = 4.47\ Kg/cm^2}$

⇒ **Cálculo del esfuerzo cortante último por torsión:**

b = 30 cm
d = 30 cm
ϕ = 0.85 (torsión)
Tu = 1893 Kg-m = 189300 Kg-cm

$$v_{tu} = \frac{3Tu}{\phi.b^2.d} = \frac{3(189300)}{(0.85)(30)^2(30)}$$

$\mathbf{v_{tu} = 24.75\ Kg/cm^2}$

⇒ **Verificación del esfuerzo combinado máximo de corte y corte por torsión:**

$$\sqrt{(1.2v_u)^2 + (v_{tu})^2} = \sqrt{[1.2(4.47)]^2 + (24.75)^2}$$

$$\sqrt{(1.2v_u)^2 + (v_{tu})^2} = 25.32 Kg/cm^2$$

$$3.18\sqrt{f'c} = 3.18\sqrt{210} = 46.08 Kg/cm^2$$

25.32 < 46.08 (O.K.)

El esfuerzo combinado de corte y corte por torsión no sobrepasa el límite máximo y puede ser resistido por la sección transversal propuesta, mediante la inclusión de armadura transversal y longitudinal.

⇒ **Definición del proceso de diseño en función del esfuerzo básico de corte por torsión:**

$$0.4\sqrt{f'c} = 0.4\sqrt{210} = 5.80 Kg/cm^2$$

v_{tu} = 24.75 Kg/cm^2

$v_{tu} \geq 0.4\sqrt{f'c}$ ⇒ debe diseñarse a cortante y torsión combinados

Si se hubiera cumplido la condición opuesta ($v_{tu} \leq 0.4\sqrt{f'c}$) no se hubiera requerido diseñar a torsión, y se podría analizar el cortante como una solicitación independiente ($v_c = 0.53\sqrt{f'c}$), despreciando el efecto de cortante por torsión.

⇒ **Esfuerzo de corte nominal del hormigón para solicitaciones combinadas:**

$$v_c = \frac{0.53\sqrt{f'c}}{\sqrt{1+\left(\frac{v_{tu}}{1.2v_u}\right)^2}}$$

$$v_c = \frac{0.53\sqrt{210}}{\sqrt{1+\left[\frac{24.75}{1.2(4.47)}\right]^2}}$$

v_c = 1.63 Kg/cm²

Este valor es muy diferente del tradicional $v_c = 0.53\sqrt{f'c} = 7.68\,Kg/cm^2$ cuando el efecto de torsión es inexistente o despreciable. Claramente se aprecia que, en el caso actual, la solicitación dominante es la torsión.

⇒ **Esfuerzo de corte por torsión nominal del hormigón para solicitaciones combinadas:**

$$v_{tc} = \frac{0.636\sqrt{f'c}}{\sqrt{1+\left(\frac{1.2v_u}{v_{tu}}\right)^2}}$$

$$v_{tc} = \frac{0.636\sqrt{210}}{\sqrt{1+\left[\frac{1.2(4.47)}{24.75}\right]^2}}$$

v_{tc} = 9.01 Kg/cm²

Este valor es bastante cercano al máximo cortante resistente por torsión $v_{tc} = 0.636\sqrt{f'c} = 9.22\,Kg/cm^2$ cuando el efecto de corte puro es inexistente. Se verifica que la solicitación dominante es la torsión.

- **Diseño a Corte:**

La sección transversal resistente al corte **Av** de los estribos transversales se calcula con la siguiente expresión:

$$A_v = \frac{(v_u - v_c).b_w.s}{Fy}$$

Despejando el espaciamiento **s** de la ecuación anterior se tiene:

$$s = \frac{A_v.Fy}{(v_u - v_c).b_w}$$

Para la presente viga se tienen los siguientes datos en la sección crítica:

v_u = 4.47 Kg/cm^2
v_c = 1.63 Kg/cm^2
b_w = 30 cm
Fy = 4200 Kg/cm^2

Si se toman estribos cerrados de 8 mm de diámetro (es el mínimo diámetro permitido por los códigos para regiones geográficas afectadas por sismos), **Av** es la sección transversal de dos ramales del estribo.

Av = 2 (0.50 cm^2) = 1.00 cm^2

El espaciamiento requerido **s** de los estribos de 8 mm de diámetro es:

$$s = \frac{(1.00cm^2)(4200Kg/cm^2)}{(4.47Kg/cm^2 - 1.63Kg/cm^2)(30cm)}$$

s = 49.30 cm

El Código Ecuatoriano de la Construcción establece que, en regiones geográficas afectadas por sismos, debe guardarse el siguiente espaciamiento mínimo entre estribos, a todo lo largo de la viga:

$s_{mín}$ = d/2 = 24/2
$s_{mín}$ = 12 cm

De igual manera, en regiones sísmicas, el espaciamiento mínimo de los estribos en los sectores próximos a los nudos (desde el nudo hasta un cuarto de la luz) debe ser:

$s_{mín,nudo}$ = **d/4** = 24/4
$s_{mín,nudo}$ = 6 cm

Este diseño debe combinarse con el diseño del acero transversal a torsión para obtener los resultados definitivos por lo que, por el momento, no conviene realizar ningún reajuste por espaciamientos mínimos.

- **Diseño del Acero Transversal de Torsión:**

La sección transversal resistente al corte por torsión **At** de los estribos se calcula con las siguientes expresiones:

$$A_t = \frac{(v_{tu} - v_{tc}).s.b^2.d}{3\alpha_t.b_1.d_1.Fy}$$

$$\alpha_t = 0.66 + 0.33\frac{d_1}{b_1} \leq 1.50$$

Para la presente viga se tienen los siguientes datos en la sección crítica:

v_{tu} = 24.75 Kg/cm^2
v_{tc} = 9.01 Kg/cm^2
b = 30 cm
d = 30 cm
b_1 = 21 cm

d_1 = 21 cm
Fy = 4200 Kg/cm^2

Se calcula α_t:

$$\alpha_t = 0.66 + 0.33\frac{21}{21} = 0.99$$

De la expresión para el cáclulo de $\mathbf{A_t}$ se despeja el espaciamiento **s**:

$$s = \frac{3A_t.\alpha_t.b_1.d_1.Fy}{(v_{tu} - v_{tc}).b^2.d}$$

Si se toman estribos de 8 mm de diámetro (el mismo diámetro que los estribos de cortante puro para no provocar confusiones en la etapa constructiva), $\mathbf{A_t}$ es la sección transversal de un ramal del estribo (en esto se diferencia de la sección transversal resistente al cortante).

A_t = 0.80 cm^2

El espaciamiento requerido **s** de los estribos de 8 mm de diámetro es:

$$s = \frac{3(0.50cm^2)(0.99)(21cm)(21cm)(4200Kg/cm^2)}{(24.75Kg/cm^2 - 9.01Kg/cm^2)(30cm)^2(30cm)}$$

s = 6.47 cm.

El espaciamiento para controlar la fisuración por torsión debe ser menor que las siguientes expresiones:

$$s \leq \frac{b_1 + d_1}{4}$$

s ≤ 30 cm

Colocando valores a la primera expresión:

$$\frac{b_1 + d_1}{4} = \frac{21 + 21}{4} = 10.5cm$$

El espaciamiento calculado anteriormente (6.47 cm o 6 cm si se redondea) es apropiado pues es menor que el espaciamiento mínimo. En los sectores con momentos torsores de menor magnitud (sector central) es conveniente aumentar el espaciamiento hasta los 10.5 cm (por motivos constructivos hasta 10 cm.).

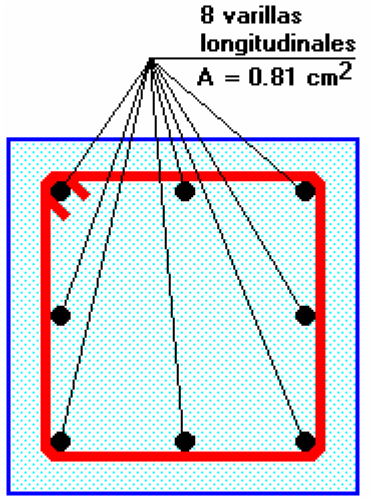
- **Diseño del Acero Longitudinal a Torsión:**

El acero longitudinal se calcula con la siguiente expresión:

$$A_L = 2A_t\frac{b_1 + d_1}{s}$$

$$A_L = 2(0.50cm^2)\frac{21cm + 21cm}{6.47cm} = 6.49cm^2$$

Se requieren al menos 8 varillas distribuidas por igual en el perímetro de las 4 caras. Cada varilla debería tener una sección transversal de 0.81 cm^2 (6.49/8), que aproximadamente coincide con las varillas de 10 mm (0.79 cm^2)



armadura longitudinal de torsión

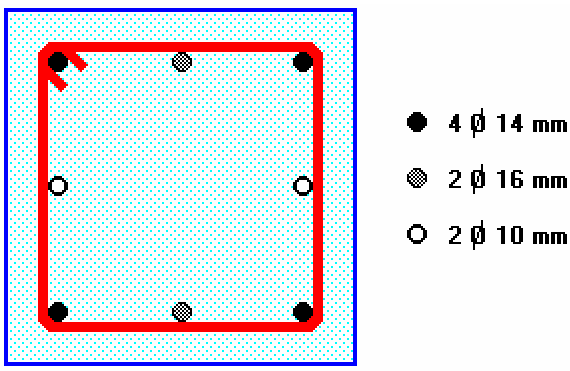
Por el momento no se escogen los diámetros comerciales de las varillas longitudinales de torsión pues este diseño debe combinarse con el diseño a flexión realizado previamente.

- **Diseño del Acero Longitudinal Combinado a Flexión y Torsión:**

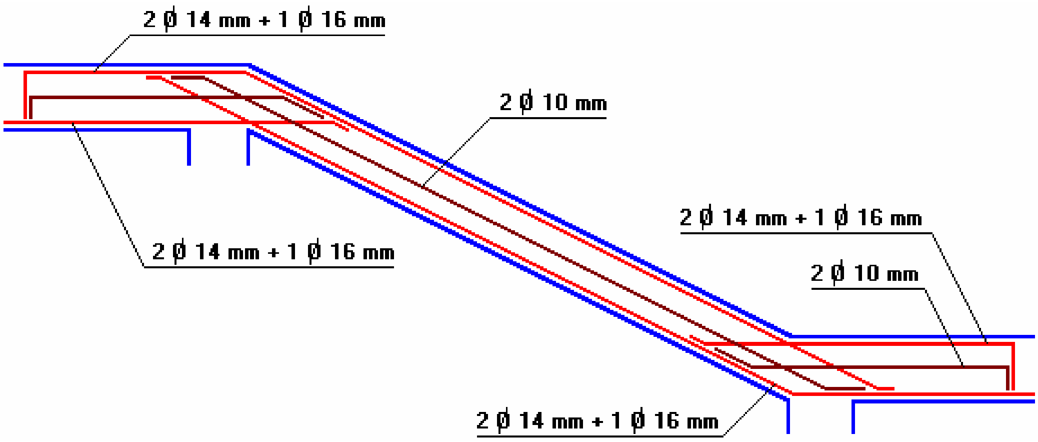
Al combinar los diseños a flexión y a torsión se obtiene la siguiente distribución de las 3 capas de refuerzo:

Capa	Acero de Flexión (cm^2)	Acero de Torsión (cm^2)	Acero Total (cm^2)	Acero comercial requerido
Inferior	2.40	3 x 0.81 = 2.43	**4.83**	**2 f 14 mm + 1 f 16 mm**
Media		2 x 0.81 = 1.62	**1.62**	**2 f 10 mm**
Superior	2.40	3 x 0.81 = 2.43	**4.83**	**2 f 14 mm + 1 f 16 mm**

La representación gráfica correspondiente es:



armadura longitudinal total



- **Diseño del Acero Transversal Combinado a Corte y Torsión:**

El espaciamiento y la sección transversal de estribos del mismo diámetro a corte y torsión combinados se calcula con la siguiente expresión:

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2}$$

Donde:

s: espaciamiento de los estribos por corte y torsión combinados
s_1: espaciamiento de los estribos por corte
s_2: espaciamiento de los estribos por torsión

⇒ **Armado mínimo de estribos a todo lo largo de la viga (armado mínimo para las zonas centrales alejadas de los nudos):**

Espaciamiento mínimo por corte:

$s_{1mín} = d/2 = 12$ cm

Espaciamiento mínimo por torsión:

$s_{2mín} = (b_1 + d_1)/4 = 10.5$ cm

Domina la especificación mínima por torsión, que se redondea al valor menor por aspectos constructivos:

$\mathbf{s_{mín} = 10}$ **cm**

Se requiere como armado mínimo 1 estribo cerrado de 10 mm cada 10 cm en las zonas centrales.

⇒ **Armado mínimo de estribos en la zona próxima a los nudos:**

Espaciamiento mínimo por corte:

$s_{1mín} = d/4 = 6$ cm

Espaciamiento mínimo por torsión:

$s_{2mín} = (b_1 + d_1)/4 = 10.5$ cm

Domina la especificación mínima por corte

$s_{mín}$ = 6 cm

Se requiere como armado mínimo 1 estribo cerrado de 10 mm cada 6 cm en los cuartos de luz próximos a la viga.

⇒ **Diseño combinado de estribos por corte y torsión en el sector próximo a los nudos**

Para el diámetro de las varillas de 8 mm, se tiene:

$s_1 = 49.30$ cm
$s_2 = 6.47$ cm

Se emplea la ecuación de espaciamiento para diseño combinado:

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{49.30} + \frac{1}{6.47}$$

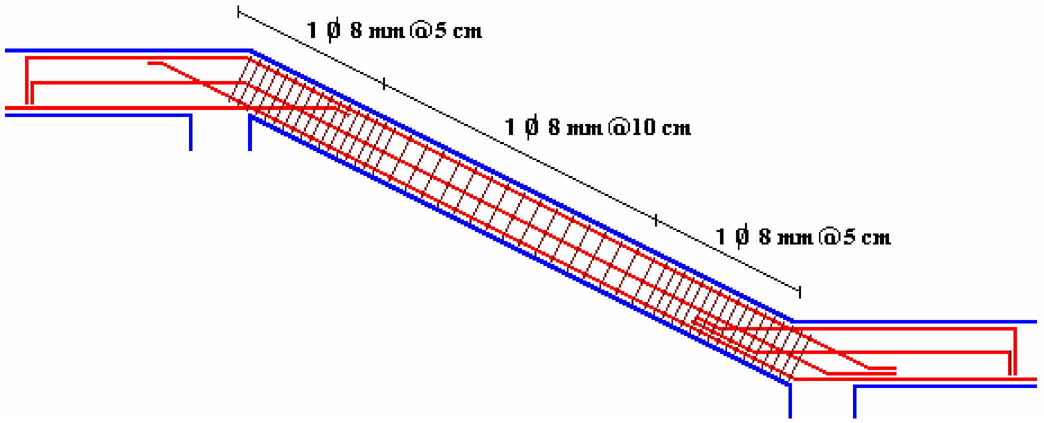
$$\frac{1}{s} = 0.11059$$

s = 5.12 cm

Se requeriría 1 estribo cerrado de 8 mm de diámetro cada 5 cm a todo lo largo de la viga, pero el espaciamiento mínimo especifica un estribo de 8 mm cada 6 cm, por lo que:
$s_{mín}$ = 6 cm

En el sector próximo a los nudos se requiere 1 estribo cerrado de 8 mm de diámetro cada 5 cm.

La representación gráfica de los estribos requeridos es la siguiente:



14.5 REFERENCIAS:

14.1 G. Winter y A. Nilson, *Proyecto de Estructuras de Hormigón*, Editorial Reverté, S.A.

14.2 P. Jiménez, A. García y F. Morán, *Hormigón Armado*, Mateu Cromo, Artes Gráficas, S. A.
14.3 R. Park y T. Pauley, *Estructuras de Concreto Reforzado*, Editorial LIMUSA S. A.
14.4 "Building Code Requirements for Reinforced Concrete", American Concrete Institute.
14.5 "Código Ecuatoriano de la Construcción", Instituto Ecuatoriano de Normalización.